Archives de la Société Belge de Philosophie

PREMIÈRE ANNÉE (1928-29)

RÉDACTION : **M. Barzin**, 6, Avenue Livingstone, Bruxelles

FASCICULE N° 2

M. BARZIN & A. ERRERA

Sur le principe du tiers exclu

BRUXELLES
IMPRIMERIE STEVENS FRÈRES
RUE DES FORTIFICATIONS, 9

1929

Monsieur Salomon Reinach
Respectueux hommage de l'auteur

Archives de la Société Belge de Philosophie

PREMIÈRE ANNÉE (1928-29)

RÉDACTION : **M. Barzin**, 6, Avenue Livingstone, Bruxelles

FASCICULE N° 2

M. BARZIN & A. ERRERA

Sur le principe du tiers exclu

BRUXELLES
IMPRIMERIE STEVENS FRÈRES
RUE DES FORTIFICATIONS, 9

1929

Sur le principe du tiers exclu.

Une proposition est ou bien vraie ou bien fausse. C'est là le *principe du tiers exclu* qui passait depuis Aristote pour une des lois de tout raisonnement et qui conserve un caractère d'extrême évidence au regard du sens commun. Mais il arrive toujours un moment où les évidences du sens commun sont mises en doute par quelques sceptiques exigeants en matière de preuves. C'est M. L.-E.-J. Brouwer qui a pris cette attitude vis-à-vis du tiers. Il l'estime incertain et veut reconstruire l'ensemble des mathématiques pour les expurger de tout recours au principe désavoué. C'est là une tâche héroïque et presque désespérée, mais qu'il poursuit avec vigueur.

Or, dans les fondements mêmes de sa construction, nous avons découvert une contradiction formelle. La démonstration en a été communiquée à l'Académie royale de Belgique dans sa séance du 8 janvier 1927 (1), et a porté l'émoi dans le camp adverse. Non pas chez le maître, qui s'est renfermé dans un silence unissant les avantages de la dignité et de la commodité, pour ne pas parler de ceux de la prudence. Mais chez les disciples, de qui nous avons reçu une avalanche de lettres, dont nous les remercions ici publiquement. Cinq travaux déjà ont été imprimés pour réfuter le nôtre (2). Nous voudrions les passer en revue et montrer que leurs arguments n'atteignent en rien la validité de notre raisonnement. Mais avant de le faire, nous allons résumer brièvement la méthode que nous avons suivie.

---

(1) Bulletin de la Classe des Sciences, 1927, pp. 56-71.

(2) Au moment où nous rédigions le présent article, nous n'avions pas connaissance du travail de M. Dresden, publié dans Bull. Amer. Math. Soc., XXXIV, 4, 1928. Il nous paraît d'ailleurs que les arguments développés ici répondent suffisamment à ses objections.

I.

Bien que M. Brouwer considère la logique comme un simple système de régularités de langage, il croit cependant qu'il est possible et qu'il est utile de donner aux principes logiques une formulation exacte. Il l'a tenté à plusieurs reprises ([1]). Il conserve le principe du syllogisme : *Quand une proposition en implique une autre et que cette autre en implique une troisième, la première implique la troisième.* Il conserve aussi le principe de double négation, tout au moins sous l'une de ses deux formes possibles : *Une proposition implique la fausseté de sa fausseté* (ou, si l'on veut, de sa négation). Remarquons qu'il rejette l'autre moitié du principe classique de double négation, à savoir que de la fausseté de la négation d'une proposition, on peut conclure à la vérité de cette proposition. Il garde encore le principe de transposition : *La fausseté de la conséquence implique la fausseté de la prémisse.*

Pour faire notre démonstration, nous avons, naturellement, adopté ces postulats. Nous avons dû y joindre — par souci d'énoncer tous les principes sur lesquels nous nous appuyions — quelques règles concernant les conjonctions « et » et « ou », dont il semble qu'aucun raisonnement ne puisse se passer. Puis, nous avons fait les deux assomptions suivantes : 1°) *Il existe réellement au moins une proposition ni vraie ni fausse*, ce que nous convenons d'appeler désormais une proposition *tierce;* 2°) le principe du quart exclu : *Une proposition ne peut être que vraie, fausse ou tierce* ([2]).

Dès lors, par de simples opérations logiques, toutes légitimées par un des axiomes énoncés, nous avons abouti au dilemme suivant :

Ou bien p' implique $\sim p$, ou bien p implique p',

([1]) Notamment dans *Intuitionistische Splitsing van mathematische Grondbegrippen*, K. Akad. van Wet. Amsterdam, deel XXXII, nr 9, pp. 877-9.

([2]) Ces deux assomptions ayant été attaquées dans les travaux discutés ci-après, nous prions le lecteur de réserver son jugement sur leur légitimité jusqu'au moment où nous la discuterons.

où p signifie : *La proposition p est vraie ;* $\sim$ p : *La proposition p est fausse ;* et p′ : *La proposition p est tierce.* Pour traduire cette conclusion en langage courant : ou bien quand une proposition est tierce, elle est fausse, ce qui est évidemment contradictoire ; ou bien quand elle est vraie, elle est tierce, ce qui est également impossible.

La supposition d'existence d'un état tiers pour une proposition quelconque aboutissant à une contradiction, nous en concluons qu'il est impossible qu'il existe une proposition tierce, ce qu'on exprime en disant que toute proposition est vraie ou fausse — principe du tiers exclu.

Remarquons que nous n'avons fait, sur la signification des mots *vrai* et *faux*, aucune hypothèse, de sorte que notre démonstration est applicable, quelle que soit l'interprétation que l'on donne de ces termes.

II.

M. Lévy, dans une note communiquée à l'Académie royale de Belgique, au cours de sa séance du 3 mai 1927 (1), a construit une interprétation de la logique brouwerienne qui échappe à toute contradiction. Mais s'il est parfaitement vrai qu'il évite l'écueil que nous avons signalé, c'est au prix d'une divergence radicale avec les idées mêmes de M. Brouwer. Comme certains passages de cette note pourraient donner à croire au lecteur non averti qu'elle constitue une réfutation de la nôtre, et que, de plus, M. Afsitidysky (2) s'en est servi dans le même but, nous voudrions établir clairement la différence qui existe entre nos points de vue. M. Lévy laisse aux propositions leur vérité ou leur fausseté habituelles, mais il définit en même temps une vérité et une fausseté différentes qu'il appelle « brouweriennes » : sont vraies les propositions dont il est possible de fournir une démonstration ; fausses, celles qu'il est possible de réduire à une contradiction.

Cette interprétation a le mérite d'une extrême simplicité. De plus, elle ne peut tomber sous le coup de notre démonstration, car elle rejette implicitement notre principe du quart exclu. Nous avons affirmé qu'une proposition est toujours vraie, fausse ou tierce. Mais que signifie, à présent, la troisième de ces alternatives ?

---

(1) Bulletin de la Classe des Sciences, pp. 256-66.

(2) Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique. Séance du 5 novembre 1927, pp. 724-30.

Pour qu'une proposition soit vraie, il faut qu'elle soit démontrable; pour qu'il soit vrai qu'une proposition soit tierce, il faudrait donc qu'on pût démontrer qu'elle est tierce. Mais si elle était tierce et s'il n'était pas possible de le démontrer? Nous serions dans une quatrième alternative, possible évidemment, et qui démentirait le postulat du quart.

Que cette interprétation ne concorde pas avec la pensée de M. Brouwer, apparaît immédiatement. M. Brouwer rejette, en effet, la réciproque du principe de double négation : nier qu'une proposition soit fausse n'est point, pour lui, affirmer qu'elle soit vraie. M. Lévy écrit, au contraire (1): « Dans la logique brouwerienne, on peut affirmer que l'affirmation brouwerienne équivaut exactement à la double négation brouwerienne ». Une proposition est donc exactement équivalente à la négation de sa négation. Les postulats de la construction de M. Lévy sont donc en contradiction avec ceux de M. Brouwer.

De plus, on peut établir facilement que la vérité de M. Lévy — c'est-à-dire le démontrablement vrai — ne coïncide pas avec la vérité de M. Brouwer: elle est notablement plus large. M. Brouwer, en effet, est un intuitionniste. Pour lui, toutes les mathématiques découlent d'une intuition a priori. Voici un passage qui l'établit clairement (2) : « Quelque affaibli qu'apparût, après cette période de développement des mathématiques, l'intuitionnisme, il a repris des forces en abandonnant la théorie de Kant concernant l'apriorité de l'espace, mais en affirmant, avec d'autant plus de décision, l'apriorité du temps. Ce néo-intuitionnisme considère le morcellement du cours de la vie en parties qualitativement différentes qui, séparées seulement par le temps, peuvent à nouveau se réunir — comme le fondement de l'intellect humain ; et l'abstraction de ce

---

(1) Page 262 des Bulletins.

(2) Intuitionisme en Formalisme, dans « Wiskunde, Waarheid en Werkelijkheid ». Groeninghe, 1919, p. 11 : « Hoe zwak na deze ontwikkelingsperiode der wiskunde het intuitionisme ook scheen te staan, het heeft zich hersteld, door van de theorie van Kant de aprioriteit der ruimte prijs te geven, doch aan de aprioriteit van den tijd des te vastberadener vast te houden. Dit neo-intuitionisme ziet het uiteenvallen van levensmomenten in qualitatief verschillende deelen, die alleen gescheiden door den tijd zich weer kunnen vereenigen, als oergebeuren in het menschelijk intellect, en het abstraheeren van dit uiteenvallen van elken gevoelsinhoud tot de intuitie van twee-eenigheid zonder meer, als oergebeuren van het wiskundig denken.

morcellement de chaque contenu de conscience en intuition de dualité-unité, sans plus, — comme le fondement de la pensée mathématique ».

On voit donc que M. Brouwer assigne au savoir mathématique une origine bien déterminée. Ce savoir découle de l'intuition originelle du temps. On va voir maintenant dans les lignes suivantes qu'aucune portion des mathématiques n'est indépendante de cette intuition (¹) : « Il s'ensuit que ce ne sont pas seulement les propositions de l'arithmétique qui doivent, en vertu de l'apriorité du temps, être qualifiées de jugements synthétiques a priori, mais aussi celles de la géométrie et non-seulement de la géométrie élémentaire à deux et à trois dimensions, mais aussi des géométries non-euclidiennes et des géométries à n dimensions. D'ailleurs, depuis Descartes, on a appris à ramener successivement chacune de ces géométries, par le moyen des coordonnées, à l'arithmétique ».

Après cela, que peut être la signification du mot *vrai* pour M. Brouwer ? Évidemment, le vrai, c'est tout ce qui découle de l'intuition originelle. On voit que la notion de démonstration n'a rien à faire ici. Sans doute, les conséquences de l'intuition originelle seront nécessairement rattachées à leur principe par une série de démarches rigoureuses ; mais ce n'est là que question de méthode, méthode que le formaliste pratique d'ailleurs exactement de la même manière. Toute la différence qu'il y a entre intuitionniste et formaliste réside dans l'attitude qu'ils ont vis-à-vis des principes de la science. Pour le formaliste, ce sont des postulats arbitraires ; pour M. Brouwer, ils doivent être garantis par l'intuition fondamentale.

De plus, une théorie rigoureusement démontrée peut demeurer sans valeur pour M. Brouwer (²) : « On peut ne pas désespérer de

---

(¹) Hiermede echter zijn op grond van de aprioriteit van den tijd niet slechts de eigenschappen der rekenkunde als synthetische oordeelen a priori gequalificeerd, doch ook die der meetkunde, en wel niet slechts der elementaire twee en drie-dimensionale, doch ook der niet-Euclidische en der n-dimensionale. Immers sinds Descartes heeft men achtereenvolgens al deze geometrieën door middel van coördinaten-rekening op de rekenkunde leeren terugvoeren (Ibid).

(²) Brouwer : *Ueber die Bedeutung des Satzes vom Ausgeschlossenen Dritten*. Journal de Crelle. T. 154, p. 3.

« An der Erreichung dieses Ziels braucht keineswegs verzweifelt zu werden. Aber damit wird kein mathematischer Wert gewonnen sein : eine ce but (rendre le langage mathématique non contradictoire). Mais, si l'on y parvient, l'on n'aura gagné par là aucune valeur mathématique. Une théorie injustifiée que l'on ne peut réfuter par aucune contradiction, n'est pas pour cela moins injustifiée. De même qu'une politique criminelle que ne peut arrêter aucune justice répressive, n'en est pas moins criminelle ».

Nous pourrions montrer pareillement que la notion de tiers de M. Brouwer ne correspond pas davantage à celle que M. Lévy a déterminée. La notion de postulat qui fait partie intégrante du tiers de M. Lévy, reste étrangère aux mathématiques telles que les conçoit le savant hollandais. Le postulat n'est pour lui qu'un fait de langage.

Mais nous nous en voudrions d'insister sur cette différence de points de vue, que nous n'avons d'ailleurs abordée que parce qu'elle nous permettait de préciser sur certains points l'attitude de M. Brouwer. M. Lévy, dans le résumé de la note citée, publié par M. Borel [1], a pleinement reconnu les divergences entre sa pensée et celle de M. Brouwer :

« J'indiquerai d'abord que, si mes résultats sont très différents de ceux de MM. Barzin et Errera, cela tient à la différence de nos points de vue ; il n'y a, contrairement à ce que certains passages de ma note citée peuvent faire croire, aucune contradiction essentielle entre eux et moi ». Et plus loin : « Il faut bien convenir qu'aucune de ces logiques (celles qu'a construites M. Lévy) n'est exactement celle de M. Brouwer, et cela est heureux pour leur développement ultérieur, car MM. Barzin et Errera ont montré que celle-ci aboutit forcément à une contradiction. Pour ma part, je ne crains aucun reproche de ce genre ».

Après ces déclarations, il nous semble que nous pouvons ne pas nous occuper davantage des constructions fort intéressantes de M. Lévy, ni du travail de M. Afsitidysky qui y est étroitement relié [2].

---

durch keinen widerlegenden Widerspruch zuhemmende unrichtige Theorie ist darum nicht weniger unrichtig, sowie eine durch kein reprimierendes Gericht zuhemmende verbrecherische Politik darum nicht weniger verbrecherisch ist ».

(1) Émile Borel. Leçons sur la Théorie des Fonctions. Gauthier-Villars, Paris 1928, p. 285.

(2) Sauf pourtant une remarque judicieuse que l'on trouve relevée à l'appendice II du présent article.

III.

Une critique plus pertinente nous est venue d'Amérique. M. Alonzo Church, dans le *Bulletin of the American Mathematical Society* (1), reconnaît que notre démonstration est parfaitement valable contre une logique qui postule le principe du quart exclu et l'existence de propositions tierces. Mais elle resterait sans efficacité contre d'autres logiques : 1°, celle qui rejette les principes du tiers et du quart exclus et admet l'existence de propositions tierces ; 2°, celle qui rejette simplement le principe du tiers exclu, sans admettre cependant l'existence de propositions tierces.

L'article de M. Church soulève, en outre, une foule de questions intéressantes sur lesquelles nous lui sommes reconnaissants de nous fournir l'occasion de nous expliquer. Tout d'abord, la définition du tiers lui-même : nous l'avons défini comme ce qui n'est ni vrai ni faux. M. Church craint que cette manière de faire ne rejette, en même temps que le principe du tiers exclu, le principe de contradiction. En effet, dit-il, le non-vrai c'est $\sim$ p. Le non-faux, c'est $\sim$ ($\sim$ p). Or, affirmer à la fois ces deux propositions dans la définition du tiers revient à affirmer la vérité et la fausseté de la proposition $\sim$ p.

Deux idées ici sont confondues, l'idée de fausseté et l'idée d'exclusion hors d'une classe. Quand nous faisons une classification quelconque, si nous voulons être sûrs qu'elle soit exhaustive, il est prudent de procéder de la manière suivante : après avoir caractérisé un certain nombre de groupes par des propriétés positives, nous rejetterons tout le résidu dans un dernier groupe qui n'aura pas de propriétés spéciales, sinon que ses membres ne possèderont aucune des propriétés qui les auraient fait ranger dans une des premières divisions. Il en va de même de la classification logique. La logique classique reconnaît un vrai, qu'elle caractérise par une propriété positive, la correspondance à une réalité extérieure, par exemple ; puis, le non-vrai ou faux, c'est-à-dire tout ce qui ne possède pas ce caractère. D'autres fois, et plus spécialement en mathématiques, elle caractérise le faux par une propriété positive, la contradiction ; et dès lors, le vrai est pour elle le non-faux.

Si maintenant nous définissons le vrai et le faux chacun par une qualité positive, il pourrait y avoir un résidu dans notre classifi-

(1) Janvier-février 1928.

cation. Ce résidu sera le tiers, qui pourra se définir comme étant le ni-vrai ni-faux.

M. Church pense que ce faisant nous employons deux espèces de négations dans le même système de logique : le *ni* de l'expression ci-dessus et le faux. Mais ces deux notions radicalement distinctes, nous en avons réglé rigoureusement l'emploi. Nous pouvons donc en user simultanément sans inconvénient. L'idée de fausseté, nous l'avons, pour raisons de généralité, laissée indéfinie. L'idée d'exclusion hors d'une classe (ni, ne.... pas, non) est définie simultanément par le principe de contradiction et par le principe du quart exclu. Ce qui n'est pas vrai, c'est le *tiers ou faux*. Ce qui n'est pas faux, c'est le *tiers ou vrai*. Si l'on affirme maintenant qu'une proposition quelconque n'est à la fois ni vraie ni fausse, cela signifie qu'elle est à la fois tierce ou fausse, et tierce ou vraie. Elle ne peut être, par conséquent, que tierce, et il n'y a là aucune espèce de difficulté.

Et que M. Church ne reproche pas à notre définition d'être circulaire : le *non*-vrai est le *tiers* ou faux ; le *tiers* est le *non*-vrai et *non*-faux. Un système de postulats ne fait jamais autrement. Il définit des termes par des propositions contenant ces termes.

Maintenant, nous allons essayer de montrer que quelqu'un qui admet l'existence de propositions tierces doit, par le fait même, admettre le principe du quart exclu. Supposons qu'il existe plusieurs espèces de propositions tierces. Il nous est toujours loisible de les considérer comme ne formant qu'une classe, que nous appellerons le tiers, et, moyennant cette convention, il n'existera plus que des propositions vraies, des propositions fausses et des propositions tierces.

M. Church craint que cette façon de procéder ne nous accule à un paradoxe apparenté à celui de Burali-Forti :

« En employant p' pour signifier *p est tiers*, il paraît vraisemblable que $(p')'$ ou p'' constituerait une quatrième possibilité, $(p'')'$, une cinquième possibilité, et ainsi de suite. En unissant toutes ces possibilités en une seule sous un nom nouveau, mettons p^*, nous avons alors à compter avec la vraisemblance que $(p^*)'$ donne encore une autre possibilité que nous pouvons désigner par l'ordinal transfini ω ; et après cela, nous avons à compter avec une possibilité ω', et ainsi de suite, si bien qu'en dernière analyse, nous atteignons n'importe quel ordinal transfini donné. Toute tentative pour unir toutes ces possibilités en une doit être regardée comme extrêmement douteuse à cause de sa liaison avec le paradoxe de Burali-Forti concernant le nombre ordinal de la suite de tous les ordinaux transfinis ».

En unissant les différentes espèces de tiers, quelles qu'elles soient, on ne court, quoi qu'en pense M. Church, aucune chance de tomber dans ce paradoxe. La notion qui amène Burali-Forti à contradiction, c'est la notion de *nombre ordinal de la classe de tous les ordinaux*. Mais il n'y aurait absolument aucun danger ni aucun paradoxe à déclarer, par exemple, que tous les nombres ordinaux sont ordinaux. De même, quelles que soient les possibilités d'infinie variété de propositions tierces, nous ne risquerions jamais rien à affirmer que toutes sont tierces.

Mais nous n'avons même pas besoin de cela, car nous ne parlons jamais de toutes les propositions tierces. Une seule nous suffit, dont nous devons pouvoir dire qu'elle est tierce, dans le très modeste sens de ni vrai ni faux, tel que nous l'avons défini plus haut.

Le paradoxe de Burali-Forti une fois hors cause, il ne resterait qu'une seule raison pour rejeter le quart exclu : ce serait de donner du mot *tiers* une définition positive — ce que M. Brouwer, d'ailleurs, ne fait jamais. Alors, sans doute, on courrait le danger d'avoir une classification non exhaustive et il faudrait prévoir un quart. Même dans ce cas, notre démonstration tiendrait. Il suffirait, pour l'appliquer, de définir provisoirement les trois symboles p, $\sim$p, p', de la manière suivante : p signifierait : *la proposition* p *est vraie ;* $\sim$p, *la proposition* p *est fausse ou tierce ;* p', *la proposition* p *est quarte.* La conclusion serait alors que la notion de quart est contradictoire et qu'il faut l'éliminer. Le principe du quart exclu serait ainsi démontré et l'on recommencerait la démonstration, cette fois telle que nous l'avons construite, pour démontrer à son tour le principe du tiers exclu. Ainsi, quelles que soient les possibilités envisagées, on peut les éliminer une à une et de proche en proche [1].

Il semble donc qu'il n'y ait pas moyen de refuser le principe du quart exclu si l'on admet la possibilité de propositions tierces. Les brouweriens impénitents devront donc se réfugier dans la seconde alternative que leur ouvre M. Church : rejeter le principe

---

[1] Ce raisonnement ne vaut évidemment que pour un nombre fini de possibilités : vrai, faux, tiers, quart... Mais qui donc ira croire au quint?

du tiers exclu sans cependant croire à l'existence de propositions tierces. Mais cette attitude est-elle vraiment possible ? S'il n'y a pas de propositions tierces, pourquoi modifier notre logique ? Pourquoi sauter à cloche-pied quand il est possible de marcher ? Ce n'est qu'au cas où nous admettrions vraiment la possibilité de l'existence réelle de propositions qui ne seraient ni vraies ni fausses, que nous serions tentés d'abandonner l'exclusion du tiers. Nous avons démontré qu'il n'en existe pas. Il faut donc ou bien démolir notre démonstration, ou bien laisser tout le monde raisonner en paix selon les canons traditionnels.

Ajoutons un argument qui ne manque pas d'une certaine importance historique. Il n'est peut-être pas quatre mémoires de M. Brouwer où ce dernier ne fournisse des exemples de propositions tierces. Consultons au hasard l'article du Journal de Crelle déjà cité. Nous y trouvons, à la page 3, un exemple de tiers ; à la page 4, trois exemples de propositions ni vraies ni fausses ; à la page 6, un cinquième exemple. Après cela, pourrait-on prétendre encore que M. Brouwer n'assume pas l'existence de tiers bien réels ?

IV.

Abordons maintenant une autre note communiquée à l'Académie royale de Belgique dans sa séance du 21 avril 1928 [1] et qui a pour auteur M. Glivenko. Ce travail nous a fait passer par d'émouvantes alternatives.

Nous avons été d'abord désolés en lisant le paragraphe liminaire : l'auteur déclarait que la base même de notre critique du brouwerisme était fausse.

Puis nous avons eu une grande joie en apercevant la raison pour laquelle M. Glivenko estimait notre démonstration dénuée de fondement. C'était, en effet, parce que, selon lui, et il le démontrait, il n'existait pas de proposition tierce. Or, qu'avions-nous voulu prouver d'autre ? En admettant même que sa démonstration rendît la nôtre sans emploi, il nous restait la satisfaction très vive d'avoir entrevu une vérité à laquelle il avait découvert un accès plus direct. De plus, comme, malgré tout, nous ne partagions pas tout-à-fait son avis sur la valeur de notre travail,

---

(1) Bulletins de la Classe des Sciences, pp. 225-8.

— petite vanité d'auteurs — nous avions la douce conviction qu'avec deux démonstrations correctes établissant toutes deux le principe du tiers exclu, la cause serait désormais entendue et les mathématiques libérées définitivement des redoutables fantômes évoqués par le magicien hollandais.

Hélas ! après cette grande joie, est venue une déception amère. Nous avons lu le travail de M. Glivenko de plus près. Et nous y avons trouvé d'étranges choses.

La première était un lemme formulé de la façon suivante : « La proposition : *la proposition* P OU NON-P [1] *est fausse* est fausse ». C'était là une interprétation assez libre du passage suivant de M. Brouwer : « Une application injustifiée du principe du tiers exclu aux propriétés de systèmes mathématiques bien construits ne peut jamais conduire à une contradiction » [2]. A cette interprétation, nous doutons que M. Brouwer se rallie, car elle contient une contradiction immédiate. En effet, s'il est faux de prétendre que le principe du tiers exclu soit faux, c'est qu'il n'existe pas de proposition tierce. Car s'il existait une proposition tierce, cette existence impliquerait la fausseté du principe du tiers. Mais que devient alors le principe du tiers? Il n'est pas faux, M. Glivenko nous l'affirme. Il n'est pas vrai non plus, M. Brouwer nous l'a redit avec fréquence. Alors, n'étant ni vrai ni faux, il ne peut être que tiers. Existerait-il donc une proposition tierce? Mais alors, le lemme de M. Glivenko?

Mais ce n'est pas tout. Vers la fin de la démonstration, on trouve une pétition de principe, d'ailleurs avouée avec une ingénuité charmante. M. Glivenko postule, en effet, que lorsqu'une proposition est tierce, il est faux qu'elle soit vraie. Et il écrit ceci : p′ *implique* $\sim$ p, ce qui doit se lire, en bonne logique, « *quand une proposition est tierce, elle est fausse* ». Il trouvera naturellement, après cela, une contradiction deux lignes plus loin. Combien, par ce postulat ingénieux, s'est-il épargné de peine ! Il nous avait fallu trois pages de longs calculs pour arriver au même

---

[1] Le lecteur reconnait dans la proposition *p ou non p*, le principe du tiers exclu.

[2] Brouwer. *Ueber die Bedeutung des Satzes vom Ausgeschlossenen Dritten*. Journal de Crelle. Tome 154, p. 3 :

« Unberechtigte Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten auf Eigenschaften wohlkonstruirter mathematischer Systeme kann nähmlich nie zu einem Widerspruch führen ».

résultat ! Il est vrai que nous nous étions interdit de confondre le non-vrai avec le faux.

Après cela, le lecteur jugera, avec nous, qu'il est inutile de s'appesantir davantage sur le travail de M. Glivenko.

V.

Une note de M. Kintchine, communiquée à l'Académie royale de Belgique, en sa séance du 21 avril 1928 [1], atteint un résultat infiniment plus intéressant et qui fait faire au débat un pas nouveau. Il démontre, en effet, d'une façon parfaitement correcte, qu'on retrouve dans la logique classique la même contradiction que nous avons trouvée dans la logique brouwerienne. Irréfutablement, il établit la formule suivante :

ou bien p implique $\sim p$, *ou bien* $\sim p$ *implique p.*

C'est-à-dire, quand une proposition est vraie, elle est fausse, ou bien quand elle est fausse, elle est vraie.

Ceci a tout l'air d'une contradiction. Ce n'en est pourtant pas une. Ce résultat est connu depuis très longtemps ; il se trouve déjà dans Frege et dans Russell, au moins en substance. Pour le bien comprendre, il faut éclaircir le sens de la notion d'implication. Cette analyse a été faite pour la première fois, à notre connaissance, par Frege, au plus tard en 1893 [2]. On nous excusera d'en donner ici un bref exposé.

On sait que l'implication équivaut exactement à la liaison entre condition et conséquence : p *implique* q équivaut à *si* p, *alors* q. Considérons maintenant, pour voir dans quelles conditions cette liaison peut être vraie, les trois propositions suivantes :

Si Socrate est un homme, il est mortel ;
Si ce cheval est un homme, il est mortel ;
Si ce rocher est un homme, il est mortel.

---

[1] Bulletins de la Classe des Sciences, pp. 223-4.
[2] *Grundgesetze der Arithmetik*, Iena, premier volume, p. 20.

Ces propositions sont, toutes trois, vraies — il est impossible d'en douter. Leurs termes peuvent être vrais ou faux, mais la liaison de la condition à la conséquence reste parfaitement intacte dans les trois cas.

En les examinant successivement, nous verrons que les deux propositions, termes du premier exemple, sont toutes deux vraies ; que les deux propositions du deuxième sont, la première, fausse et la seconde, vraie ; que les deux propositions du troisième sont toutes deux fausses. Seul le dernier cas restant, à savoir celui où la condition est vraie et la conséquence, fausse, ne se trouvera jamais réalisé dans aucune implication.

Résumons maintenant ces considérations dans le tableau suivant: deux propositions pouvant chacune être vraie ou fausse produisent l'une des quatre combinaisons différentes :

vrai — vrai ;
faux — vrai ;
faux — faux ;
vrai — faux.

L'implication exclut la possibilité du quatrième cas. C'est là toute sa signification et les lois usuelles de la logique ne permettent point de lui en donner une autre. L'allure de ce résultat pourra paraître assez paradoxale. Mais l'impression d'étrangeté s'évanouira si l'on réfléchit à l'usage que nous faisons de l'implication. Cette notion n'a, en effet, dans nos raisonnements, qu'un seul emploi, que l'on peut définir schématiquement de la manière suivante : nous établissons la vérité de la formule p *implique* q ; puis celle de la proposition p ; nous en concluons la vérité de q. Aucun des deux cas, à apparence étrange, faux-vrai et faux-faux, ne peut être utilisé de la sorte. De là notre manque de familiarité avec eux. Mais l'implication, quoique inutilisable, n'en subsiste pas moins.

On peut donc dire que le faux implique tout, aussi bien le vrai que le faux. Nous comprenons maintenant pourquoi la formule à laquelle est parvenu M. Kintchine n'est qu'apparemment paradoxale. Ou bien, nous dit-il, p *implique* $\sim p$, ou bien $\sim p$ *implique* p. La première branche de l'alternative se produira quand p sera faux, p alors impliquant toute autre proposition que ce soit et notamment $\sim p$. La seconde branche de l'alternative, au contraire, sera réalisée quand p sera vrai, alors $\sim p$ étant faux impliquera toute autre proposition que ce soit, et notamment p.

Mais alors, ne pourrait-on peut-être se servir du même raisonnement, pour soulager la logique de M. Brouwer de la contradiction que nous avons fait peser sur elle? Nous sommes arrivés, en effet, à une formule du même genre : *ou bien p implique p'*, *ou bien p' implique* $\sim p$. La contradiction que nous voulons y voir est-elle réelle? Ou bien le sens que nous venons de donner à la notion d'implication ne lève-t-il pas toute difficulté?

En admettant qu'il en fût ainsi, M. Brouwer n'échapperait à un danger que pour retomber dans un autre, plus flagrant. Nous allons montrer, aussi brièvement que possible, qu'il lui est interdit, sous peine de contradiction immédiate, d'adopter pour son implication le sens de l'implication classique, tel que nous venons de le préciser. Il nous faut, pour cela, préciser, à son tour, le sens de la notion *ou*. Le langage courant l'emploie dans deux acceptions différentes. Elle signifie toujours dans l'une ou dans l'autre, que l'une au moins des deux propositions qu'elle unit, est vraie. En plus, elle signifie souvent que l'une au moins de ces deux propositions est fausse. Dans ce dernier cas, elle comporte une exclusion mutuelle. Convenons, dans ce qui va suivre, de ne l'employer que dans le premier de ces deux sens, c'est-à-dire que la *somme logique p ou q* signifiera *l'une au moins des deux propositions p et q est vraie*, et rien de plus.

Formons maintenant l'expression $\sim p$ *ou* q et demandons-nous dans quels cas elle sera vraie et dans quels cas elle sera fausse. Elle sera vraie évidemment lorsque p et q seront tous deux vrais, car alors $\sim p$ est faux, mais q est vrai. Elle sera vraie aussi dans le cas où p et q seront, le premier, faux et le second, vrai, car alors $\sim p$ et q sont tous deux vrais. Elle sera vraie encore lorsque p et q seront tous deux faux, car alors q sera faux, mais $\sim p$ vrai. Elle ne sera fausse que dans le quatrième cas, à savoir quand p sera vrai et q faux.

On voit que l'on retrouve une concordance parfaite entre les conditions de vérité de cette expression $\sim p$ *ou* q et celle de p *implique* q. Elles sont donc exactement équivalentes et on peut considérer l'une comme la définition de l'autre.

Ce résultat une fois acquis, observons que M. Brouwer peut difficilement contester qu'une proposition quelconque s'implique elle-même, c'est-à-dire que si elle est vraie, elle est vraie. Le principe d'identité que nous venons d'énoncer paraît réellement indispensable à toute pensée.

Or, si l'on veut lui appliquer l'équivalence que nous venons d'établir, on verra que nous parvenons ainsi à la formule

$$p \textit{ implique } p \text{ est équivalent à } \sim p \textit{ ou } p.$$

Mais $\sim p$ *ou* p doit se lire : des deux propositions p et $\sim p$, l'une au moins doit être vraie. C'est le principe du tiers exclu qu'on voit, de la sorte, être l'équivalent du principe d'identité. Ou bien M. Brouwer doit rejeter, s'il se réfugie dans notre analyse de l'implication, la légitimité de la tautologie, et sans tautologie, plus de langage ni de pensée ; ou bien il doit admettre, en même temps, ce pauvre principe du tiers exclu contre lequel il fulmine depuis tant d'années.

A vrai dire, il pourrait objecter à notre raisonnement qu'il lui est possible d'analyser l'implication d'une manière différente. La théorie que nous en avons faite laissait dans l'ombre, on l'aura remarqué, la possibilité du tiers. Si l'on en tenait compte, on pourrait peut-être éviter ce mortel rapport entre principe d'identité et principe du tiers exclu.

A tout prendre, cette manière de faire pourrait aisément se justifier. Puisque l'implication exclut la possibilité que la première soit vraie et que la seconde ne le soit pas, la tierceté du second terme serait aussi incompatible avec la vérité du premier. Et dans ce cas, l'implication exclurait la possibilité de la coexistence de p et de $\sim q$ *ou* q'. La formule qui serait équivalente à cette nouvelle notion d'implication, ce ne serait plus $\sim p$ *ou* q, mais maintenant $\sim p$ *ou* p' *ou* q.

Cette manière de sauver l'intuitionnisme en recourant à la signification traditionnelle de la notion d'implication, exprimée seulement en un langage nouveau, n'est pas plus recevable que la précédente et elle cache une contradiction immédiate. Mais cette fois, pour la faire ressortir, il nous faut user du calcul symbolique et nous prions le lecteur de se reporter à l'appendice I, où nous avons renvoyé la démonstration formelle.

VI.

Après avoir passé en revue les différentes critiques qu'on nous a objectées, nous croyons avoir le droit de conclure qu'aucune d'entre elles n'a ébranlé la validité de notre démonstration. Et la première conclusion que nous pouvons tirer de cet examen, c'est que les principes de la logique ne sont pas des vérités isolées les unes des autres, dont on puisse accepter quelques-unes en rejetant le reste. Mais elles forment un faisceau bien lié. Si l'on touche à l'une des portions de l'ensemble, toutes les autres doivent être modifiées. Nous avions, dans notre précédent travail, indiqué déjà un pareil moyen de rendre le brouwerisme cohérent — mais hélas ! sans lui conférer de fécondité.

Il nous semble d'ailleurs que la question du tiers exclu a été soulevée par M. Brouwer sans nécessité bien pressante. M. Brouwer est un intuitionniste. Il estime, nous l'avons dit déjà, que toutes les mathématiques découlent de l'intuition du temps. C'est là un criterium positif de vérité. On pouvait fort bien lui appliquer les lois de la logique habituelle. Il aurait suffi de définir le faux comme étant le non-vrai, c'est-à-dire ce qui ne découlait pas de l'intuition originelle. Et le principe du tiers exclu aurait conservé ainsi toute sa validité. Il semble donc que la position de M. Brouwer soit double et puisse s'analyser en deux théories indépendantes. La première, sa théorie de l'origine des mathématiques, la seconde, sa théorie de la possibilité d'un tiers.

Nous avons fait justice de la seconde et nous n'avons pas abordé la première. Il nous semble pourtant que sur ce dernier point quelques réflexions s'imposent.

Un formaliste adopte n'importe quel système de postulats pour en tirer des conséquences, et construit ainsi des théories hypothético-déductives, des barêmes de déductions toutes faites, pour le jour où les sciences de la nature pourront les appliquer. L'intuitionniste prétend au contraire que, parmi tous les postulats, certains seulement sont légitimes. Son attitude est donc restrictive. Il dresse des barrières autour de la science. Il lui assigne ses méthodes de progrès. Nous croyons cette attitude dangereuse. Toutes les barrières que l'on a dressées de tout temps autour de la science ont toujours cédé sous l'impulsion irrésistible des élargissements de l'esprit humain. Il vaut mieux laisser l'avenir seul juge de la fécondité de nos constructions scientifiques. Toute codification imprudente opérée dès maintenant risque d'étouffer un développement possible dont peut-être la science de demain aura le besoin le plus pressant.

L'attitude du formaliste présente encore un second avantage qui retiendra l'attention des esprits positifs. Les mathématiques sont, depuis longtemps, un savoir qui a ses méthodes propres et ses criteriums de vérification. Adopter un intuitionnisme quelconque, c'est faire rentrer dans le champ de ces sciences des problèmes philosophiques. Leur discussion, forcément incertaine, viendra troubler cette clarté, qui fut toujours pour le mathématicien le plus impérieux des besoins. Nous ne méprisons pas la philosophie. Nous croyons, au contraire, qu'elle remplit une tâche nécessaire dans l'évolution de l'esprit humain. Mais nous croyons aussi qu'il importe extrêmement de ne pas effacer la ligne de démarcation qui la sépare des mathématiques. Nous ne voyons pas ce que les mathématiques gagneraient à être envahies par les débats philosophiques. Nous voyons clairement ce qu'elles y perdraient.

ANNEXE I.

Nous allons montrer que si M. Brouwer accepte l'équivalence de l'implication $p \supset q$ [1] avec la somme logique $\sim p \vee p' \vee q$ [2], il tombe dans une contradiction.

Quand la proposition p est tierce, la somme logique $\sim p \vee p' \vee q$, ayant un terme vrai, p', est vraie. Si l'implication lui équivaut, elle est donc également vraie et nous avons, quel que soit q

$$p' . \supset . \ p \supset q.$$

Transposons [3] cette formule ; il vient

$$\sim (p \supset q) . \supset . \sim p'.$$

Si l'implication est fausse, c'est que p est vrai sans que q le soit. Si q n'est pas vrai, il est faux ou tiers. Nous pouvons donc substituer au premier membre de notre formule l'expression $p\ (q' \vee \sim q)$ [4]. Il vient

$$p . (q' \vee \sim q) . \supset . \sim p'.$$

En transposant à nouveau et en se rappelant que $p' \supset \sim \sim p'$ et que la négation d'un produit logique équivaut à la somme logique des négations de ses termes

$$p' . \supset . \sim p \vee \sim (q' \vee \sim q).$$

---

(1) Lire : *p implique q* ou bien *si p, alors q*.

(2) Lire : *p est faux ou p est tiers ou q est vrai*. On se rappellera que pour que la somme logique soit vraie, il faut et il suffit qu'au moins l'un de ses termes soit vrai.

(3) Voir page 4 du présent travail.

(4) Lire : *p et* $q' \vee \sim q$. Le point entre propositions est le symbole du produit logique ; celui-ci est vrai quand tous ses termes sont vrais.

De même la négation d'une somme logique équivaut au produit logique des négations de ses termes. Donc

$$p' . \supset . \sim p \vee \sim q' . \sim \sim q .$$

Or, $\sim q'$ signifie qu'il est faux que la proposition q soit tierce ; $\sim \sim q$, qu'il est faux qu'elle soit fausse. Elle ne peut donc être que vraie. Donc

$$p' \supset \sim p \vee q .$$

Enfin, q étant une proposition quelconque, nous pouvons la remplacer par p : il vient

$$p' \supset \sim p \vee p ,$$

c'est-à-dire *lorsqu'une proposition est tierce, elle est ou bien fausse ou bien vraie,* c. q. f. d.

ANNEXE II.

Nouvelle démonstration de la seconde partie du lemme II.

Dans notre démonstration réfutant l'existence d'une proposition tierce, nous avons utilisé deux lemmes.

Lemme I. — *La condition nécessaire de la fausseté d'une somme logique est la fausseté de chacun de ses termes :*

$$\sim(p \vee q) : \supset : \sim p . \sim q. \text{ [1]}$$

Lemme II. — 1° *Quand un terme d'un produit logique est faux, le produit logique est faux :*

$$\sim p \vee \sim q . \supset . \sim(pq). \text{ [2]}$$

2° *La condition nécessaire de la fausseté d'un produit logique est la fausseté d'un au moins de ses termes:*

$$\sim(pq) . \supset \sim p \vee \sim q.$$

La démonstration que nous avions donnée [3] de ce 2°, n'était pas concluante. M. Afsitidysky nous l'a fait fort justement remarquer [4].

Nous avons aussitôt rétabli la démonstration ; mais nous ne l'avons pas publiée jusqu'ici, parce que nous attendions l'occasion que nous fournit le présent travail.

Postulat 4, 24. — *Si une proposition implique qu'une autre proposition en implique une troisième, alors le produit logique des deux premières implique la troisième et réciproquement :*

$$p . \supset . q \supset r : \equiv : pq \supset r.$$

Nous savons, par la première partie du lemme II, que la fausseté d'un de ses termes détermine la fausseté du produit logique.

---

[1] Note citée p. 9. [2] Note citée p. 10. [3] Ibid. [4] Op. cit.

Il est, d'autre part, évident que la vérité d'un de ses termes ne peut déterminer la fausseté du produit, puisqu'alors la vérité simultanée des deux termes entraînerait à la fois la vérité et la fausseté du produit. Il ne nous reste plus à envisager que les conséquences, pour le produit logique, de l'état tiers de l'un ou de ses deux termes.

Nous allons établir que si l'état tiers d'une proposition entraîne la fausseté du produit logique, l'autre proposition est nécessairement fausse, ce qui revient au théorème à démontrer.

Supposons donc que la proposition p soit tierce, et qu'elle détermine la fausseté du produit logique pq :

$$p' \supset \sim (pq).$$

Transposons cette formule ; il vient (postulats 2 ; 1 ; 3),

$$pq \supset \sim p'.$$

En vertu du postulat (4, 24)

$$q . \supset . p \supset \sim p'.$$

En transposant le second membre (2; 3), on a

$$q . \supset . \sim \sim p' \supset \sim p.$$

On démontre facilement (1 ; 4, 24 ; 3) que cette formule équivaut à

$$q . \supset . p' \supset \sim p.$$

Le second membre de cette formule étant une contradiction, la proposition q, qui l'implique, ne peut être que fausse en vertu de la définition classique du faux, acceptée par M. Brouwer

Nous avons donc démontré que la condition est nécessaire.

ANNEXE III.

Le postulat nouveau (4,24) simplifie grandement la démonstration précédente. Il n'est pourtant pas indispensable : nous donnons ici une seconde démonstration sans cette hypothèse additionnelle.

Nous démontrons la réciproque du lemme I, dont nous avons besoin cette fois ; nous ne démontrons pas d'une façon complète la réciproque du lemme II, ce qui nous oblige à considérer un cas de plus ; et nous établissons le théorème principal en montrant que ce cas nous conduit, lui aussi, à une contradiction.

Réciproque du lemme I : Si deux propositions sont fausses, leur somme logique est fausse :

$$\sim p \,.\, \sim q : \supset : \sim (p \vee q).$$

Par définition, si la somme logique $p \vee q$ est vraie, l'une au moins des propositions est vraie et quel que soit l'état de l'autre proposition ; on est donc dans l'un des cinq cas pq, pq', $p'q$, $p \sim q$, $\sim p.q$.

D'autre part, le lemme I nous a appris que si $p \vee q$ est faux, alors on a $\sim p$ et $\sim q$.

Il s'ensuit que dans les trois autres cas possibles, $p' \sim q$, $q' \sim p$ et $p'q'$, la somme logique de $p \vee q$ est tierce.

Il n'y a donc pour déterminer la fausseté de la somme logique, que le seul cas $\sim p. \sim q$.

Réciproque affaiblie du lemme II. Nous savons, d'une part, que la vérité du produit logique pq est impliquée par pq ; et par la première partie du lemme II, que la fausseté de pq est impliquée par l'un des cinq cas $\sim p.q$, $\sim q.p$, $\sim p.q'$, $\sim q.p'$, $\sim p. \sim q$.

Il reste les cas pq', $p'q$ ou $p'q'$.

Il est évident que jamais pq' n'implique $\sim (pq)$, car alors il suffirait d'affirmer une proposition p toujours vraie, en même temps qu'une proposition tierce q', pour avoir un produit logique faux ; en d'autres termes, toutes les propositions tierces de M. Brouwer deviendraient fausses, si l'on énonçait en même temps que 2 et 2 font 4.

Il en est de même du cas $p'q$.

Le seul cas non envisagé étant $p'q'$, nous pouvons dire à coup sûr que

$$\sim(pq) \,.\supset.\, \sim p \vee \sim q \vee p'q'.$$

Malheureusement, pour écarter le troisième cas, bien invraisemblable, nous aurions besoin d'un postulat nouveau.

Théorème. La notion de l'état tiers p' d'une proposition p implique contradiction.

La démonstration commence comme dans notre note.

Mais la seconde formule de cette démonstration contenait, dans son second membre, la négation d'un produit logique que nous avions remplacée par la somme logique des négations de ses constituants ; nous devons maintenant considérer le troisième cas, où les constituants seraient tous deux tiers. Nous allons montrer que dans ce cas, nous sommes encore amenés à une contradiction.

Par syllogisme (3) nous devrons avoir :

$$p : \supset : (\sim p \vee p)' . (\sim p' \vee p'')'.$$

Donc, en vertu de 4, 21 nous aurions à la fois :

$$p \supset (\sim p \vee p')' \quad \text{et} \quad p \supset (\sim p' \vee p'')'.$$

Étudions d'abord la première de ces formules ; son second membre affirme qu'une somme logique est tierce et nous avons vu, par la démonstration de la réciproque du lemme I, dans quels trois cas cela se produit ; nous obtenons donc par syllogisme :

$$p : \supset : (\sim p)' . \sim p' \vee p'' . \sim\sim p \vee (\sim p)' . p''.$$

Or (1)

$$p \supset \sim\sim p ;$$

donc si p est vraie, $\sim p$ n'est jamais tiers, ce qui exclut les termes qui contiennent $(\sim p)'$. Donc nous sommes amenés à

$$p : \supset : p'' . \sim\sim p.$$

Donc 4, 21

$$p \supset p''.$$

Étudions maintenant la seconde formule, en nous souvenant qu'elle doit être vraie en même temps que la première. Son second membre est encore l'affirmation qu'une somme logique est tierce. Un calcul analogue au précédent nous montre alors :

$$p : \supset : (\sim p')' . \sim p'' \vee p''' . \sim \sim p' \vee (\sim p')' . p''' .$$

Remarquons d'ailleurs que le second membre de cette formule ne diffère du second membre de la première, que par le fait que p est devenu p', donc p' est devenu p'' et p'' est devenu p'''. Mais comme la conclusion de la première formule était que l'hypothèse p implique p'', cette hypothèse p est donc incompatible soit avec p''', soit avec $\sim$ p'', puisqu'une proposition, en l'occurence p'', est toujours incompatible avec l'affirmation qu'elle est tierce ou fausse (principe de contradiction, 6).

Mais ceci nous oblige à écarter chacun des trois cas de la seconde formule, comme incompatible avec la conséquence de la première.

Conclusion : La notion d'état tiers p' implique, même dans ce cas-ci, que p implique contradiction. c. q. f. d.