LES FRACTIONS EN SUMÉRIEN

PAR F. THUREAU-DANGIN

En sumérien, les fractions avaient la forme *igi*-n-*gál*, *n* correspondant à notre dénominateur et le numérateur, qui reste sous-entendu, étant toujours l'unité : 1/3, par exemple, s'écrivait *igi-3-gál* « la troisième part » ; 1/6 *igi-6-gál* « la sixième part », etc. Cette exclusion de tout numérateur autre que l'unité est générale dans l'antiquité avant les mathématiciens grecs[1].

De très bonne heure, les Sumériens ont conçu deux unités fractionnaires, logiquement coordonnées avec leur système de numération : le *šuš* (= 1/6) et le *gin* (= 1/60). A l'échelle montante 1 10 60 répondait l'échelle descendante 1 1/6 1/60.

Le *gin* est attesté, par exemple comme fraction de la mine[2]. Dans cette acception, les Accadiens ont traduit le terme sumérien par *šiqlu* « sicle », c'est-à-dire « poids » ; mais, originairement, *gin* ne signifie pas autre chose que 1/60 ; c'était une simple fraction. On disait aussi le *gin* (1/60) du *sar* (mesure de superficie), le *gin* (1/60) du *sila* (mesure de capacité).

Le *šuš* ou 1/6 était exprimé par un signe figurant le sextant (voir OLZ, 1909, p. 383). Il est attesté par un vocabulaire[3], mais, pratiquement, c'est la formule *igi-6-gál* qui est toujours restée exclusivement employée pour désigner 1/6. Le *šuš* n'est entré dans le commun usage que par ses multiples, le double *šuš*, c'est-à-dire 1/3, et le quadruple *šuš*, c'est-à-dire 2/3. Le double *šuš* était désigné par le terme *šuššana* composé de *šuš* (1/6) et d'un élément inexpliqué *šana*. Il est à noter que le chiffre exprimant *šuššana* est formé du signe figurant le sextant (= *šuš* = 1/6) et du signe (= 1/2)[4]. Au lieu de la fraction 1/2, on attendrait le chiffre 2, puisque 1/3 est le double de 1/6. Mais, les Sumériens ne concevant pas en principe d'autre numérateur que l'unité, le doublement d'une fraction ne pouvait se présenter à leur esprit que sous la forme de la division par 2 du dénominateur. C'est là sans doute la raison pour laquelle

1. Voir, à ce sujet, Abel Rey, *La Science orientale avant les Grecs*, pp. 222 et suiv.
2. On trouve aussi le *gin-tur* ou « petit *gin* » qui désigne le $1/60^2$ (de la mine) ; voir OLZ, 1909, p. 384.
3. CT XII, 1, 8 *b*.
4. Au sujet de ce chiffre, voir RA VI, p. 145 et suiv.

la fraction 1/3 est écrite 1/6 1/2. Il est probable que dans *šuššana* (1/3) l'élément inexpliqué *šana* désigne cette opération qui dédouble pour doubler. Le quadruple *šuš* (2/3) est écrit comme le double *šuš*, avec cette différence que le chiffre (1/2) est répété : cette graphie 1/6 1/2 1/2 indique que la fraction 1/6 est doublée deux fois. Le nom est *šanabi*, peut-être abrégé, comme O. Neugebauer l'a suggéré[1], de **šuššana-šanabi* qui pourrait signifier « 1/6 doublé et doublé ». Le quintuple *šuš* (5/6) est attesté beaucoup plus tardivement que le double et le quadruple *šuš*. A ma connaissance, on ne le rencontre pas avant la dernière dynastie d'Ur. Le signe ne diffère de celui qui exprime 2/3 que par un clou supplémentaire. Le nom de cette fraction est en sumérien *kingusila* et en accadien *parasrab* (contracté *parab*), c'est-à-dire « la grande fraction » (voir Zimmern, BSGW, nov. 1901, p. 51, note 1[2]). Quant au triple *šuš*, qui aurait fait double emploi avec la fraction 1/2, il n'a jamais été usité.

Il paraît donc avéré que, dès une date extrêmement reculée, les Sumériens ont possédé, pour l'expression des fractions, les premiers éléments d'un système parfaitement coordonné avec celui qu'ils employaient pour l'expression des entiers. Ce système n'a cependant atteint sa perfection qu'à partir du moment où a été trouvé le moyen d'exprimer par une simple relation de position le rapport entre unités d'un ordre différent de grandeur. Dans ce système savant, attesté dès au moins le début du deuxième millénaire[3], c'est le même chiffre (𒁹) qui désigne non seulement l'unité simple, ou 60 ou une puissance de 60, mais aussi 1/60, $1/60^2$, $1/60^3$, etc. ; c'est aussi le même chiffre (𒌋) qui désigne 10, 60×10, $60^2 \times 10$, etc., ou encore 1/6, $\frac{1}{6 \times 60}$, $\frac{1}{6 \times 60^2}$, etc. A proprement parler, le nouveau système ne distingue plus entre entiers et fractions, car il fait complète abstraction de l'ordre absolu de grandeur des unités et n'exprime que leur ordre de grandeur relatif. Pour traduire dans ce système une fraction du type *igi-n-gál*, c'est-à-dire à dénominateur quelconque, il existait des tables qu'on peut appeler des tables de conversion. La plus ancienne de ces tables paraît être, jusqu'ici, celle qui a été trouvée à Tello et publiée autrefois par Delaporte[4].

Ce texte débutait par : *2 igi 30* « la deuxième part (de l'unité) est 30 », c'est-à-dire $\frac{1}{2} = 30$. Il énumérait encore la troisième part (20), la quatrième (15), etc., jusqu'à la 59e. Il se terminait par *1 igi 1*, c'est-à-dire $\frac{1}{1} = 1$.

1. Cf. *Zur Entstehung des Sexagesimalsystems*, p. 17 (*Abhandlungen d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1927).
2. Selon Zimmern, *parab* serait, non pas contracté de *parasrab*, mais formé de *pû* et *rabû*.
3. Voir le texte daté de la première année de Samsu-iluna, publié RA XXVII, p. 73 ss.
4. Voir RA VIII, p. 131 ss. Ce texte remonte-t-il, comme le pense Delaporte, à la dernière dynastie d'Ur? C'est possible, mais, à mon sens, peu probable. Le seul signe présentant une forme caractéristique est le signe *NU* (avec trois clous). Mais, à Tello, cette forme est encore attestée au temps du troisième roi de la première dynastie babylonienne, voir le contrat AO 4312, l. 3 (*Nouvelles Fouilles*, p. 188).

En regard des fractions qui ne peuvent, dans ce système, être exprimées par un nombre fini de chiffres, est écrit *nu*, c'est-à-dire « inexistant ». Il est à peine besoin de faire remarquer que les fractions inexprimables sont beaucoup moins nombreuses dans le système sexagésimal que dans notre système de numération[1].

Les tables de conversion servaient aux divisions. Soit un nombre a à diviser par un nombre b. Le scribe cherchait dans la table de conversion l'expression sexagésimale de la fraction $\frac{1}{b}$ et multipliait ensuite par a. Exemple : 30 à diviser par 5. D'après la table de conversion, $1/5 = 12$; d'après la table de multiplication, le produit de 12×30 est 6, qui est le quotient cherché. (Voir, à ce sujet, Ungnad, *OLZ*, 1916, p. 366, et le récent article d'O. Neugebauer, *Sexagesimalsystem und Babylonische Bruchrechnung*, dans *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Abt. B, Bd. 1, pp. 183 et suiv.)

La table de conversion d'où j'ai tiré les exemples précités est du type le plus simple et le plus commun. Il en existait d'autres beaucoup plus complètes. J'ai publié dans *Tablettes d'Uruk*, n° 31, une table (la première d'une série) qui comprend 157 fractions à dénominateur croissant de 1 à 3[2]. Elle débute par *[igi]-1-gál-bi 1-àm* « l'unique part de (l'unité) est 1 » et se termine par *igi-3-gál-bi 20* « la troisième part de (l'unité) est 20[3] ». Voici la transcription des quatre premières et des quatre dernières lignes de cette table :

[igi]-1-gál-bi 1-àm		
[igi-1].0.16.53.53.20(-gál-bi)		*59.43.10.50.52.48*
[igi-1].0.40.53.20	—	*59.19.34.13.7.30*
[igi-1].0.45	—	*59.15.33.20*
....		
igi-2.48.45	—	*21.20*
igi-2.55.46.52.30	—	*20.28.48*
igi-2.57.46.40	—	*20.0.15*
igi-3-gál-bi 20.		

1. Le système décimal présente le grave inconvénient d'être construit sur un nombre qui ne compte pas, parmi ses facteurs, le nombre 3. Un système où on ne peut écrire 1/3, 1/6, etc., est évidemment très imparfait. Quant au système sexagésimal, il a contre lui d'avoir pour base un nombre trop élevé, ce qui rend nécessaire une unité intermédiaire (en l'espèce 10). Le système duodécimal eût certainement été préférable. Mais, dans aucun système de numération, 12 n'a pu s'affirmer comme base, parce que trop voisin de 10, imposé de temps immémorial comme unité par les dix doigts que la nature nous a donnés.

2. La tablette est du temps des Séleucides, mais c'est une copie de copie. L'original est, sans doute, très antérieur à la conquête grecque.

3. Cette ligne devait être la première de la tablette suivante.

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1.0.16.53.53.20} = 59.43.10.50.52.48$$

$$\frac{1}{1.0.40.53.20} = 59.19.34.13.7.30$$

$$\frac{1}{1.0.45} = 59.15.33.20$$

. . . .

$$\frac{1}{2.48.45} = 21.20$$

$$\frac{1}{2.55.46.52.30} = 20.28.48$$

$$\frac{1}{2.57.46.40} = 20.0.15$$

$$\frac{1}{3} = 20$$

Tous ces calculs, comme il est facile de s'en rendre compte, sont parfaitement exacts. On ne peut signaler qu'une légère faute de copiste à l'avant-dernière ligne, où, au lieu de 20.0.15, il faut lire 20.15.

LES MESURES ANGULAIRES "AMMATU" ET "UBÂNU"

PAR F. THUREAU-DANGIN

D'après Kugler, ZA XV, p. 387 ss., et *Sternkunde*, I, p. 25, les Babyloniens auraient divisé l'écliptique comme il suit :

Écliptique = 12 *bêru* = 360°.
1 *bêru* = 12 *ammatu* = 30°.
1 *ammatu* = 24 *ubânu* = 2° 30′.
1 *ubânu* = 6′ 15″.

D'après P. V. Neugebauer et Weidner, BSGW, t. 67 (1915), p. 79, la division aurait été la suivante :

Écliptique = 12 *bêru* = 360°.
1 *bêru* = 15 *ammatu* = 30°.
1 *ammatu* = 24 *ubânu* = 2°.
1 *ubânu* = 5′.

Depuis, dans *Sternkunde*, II, p. 547, Kugler a adopté pour l'*ubânu* la valeur proposée par Neugebauer et Weidner, soit 5′, mais il a donné de bonnes raisons de penser que l'*ammatu* comptait tantôt 24, tantôt 30 *ubânu*, et correspondait, par conséquent, dans un cas à 2° et dans l'autre à 2° 30′.

Ces dernières conclusions peuvent être exactes, mais ce qui semble tout à fait erroné, c'est que l'*ammatu* ou « coudée » et l'*ubânu* ou « doigt » aient été des subdivisions de l'écliptique. Ces deux mesures, d'où procèdent le πῆχυς et le δάκτυλος de l'astronomie grecque[1], servaient à évaluer de petites distances angulaires. On les trouve employées dans des recueils d'observations astronomiques ou dans des éphémérides (voir, par exemple, les tablettes étudiées par Kugler, *Sternkunde*, I, pp. 59 ss.). Le plus ancien texte qui en fasse mention est la tablette VAT 4956, publiée par P. V. Neugebauer et Weidner dans BSGW, t. 67, 2e fasc., sous le titre « Ein astronomischer

1. Voir Letronne, *Journal des Savants*, 1817, pp. 742 et 744; Paul Tannery, *La Géométrie grecque*, 1re partie, Histoire générale de la géométrie élémentaire, p. 56, et Kugler, *Sternkunde*, II, p. 550.

Beobachtungstext aus dem 37. Jahre Nebukadnezars II. (— 567/66) ». Dans ces textes, la position de la lune ou de telle planète est déterminée non par des coordonnées écliptiques, mais par la distance qui la sépare de l'étoile fixe la plus proche dans la direction nord, sud, est ou ouest, et cette distance est exprimée en *ammatu* et *ubânu*. Ces deux mesures n'ont aucune relation ni avec la division de l'écliptique, ni avec celle du cercle en général.

La division du cercle procède de celle du jour et la division du jour de celle de l'année. Le jour a été divisé en 12 *bêru* de 30 *geš*[1] à l'image d'une année idéale de 12 mois de 30 jours. En divisant le temps de la révolution diurne, on divisait par là même les cercles parallèles décrits par les étoiles dans leur mouvement uniforme. Longtemps le *bêru* et le *geš*, mesures d'arc, ne se distinguèrent pas du *bêru* et du *geš*, mesures de temps. La notion d'une division du cercle indépendante de la division du jour ne commença à prendre corps qu'à partir du moment où on s'avisa d'étendre à l'écliptique une division qui, par son origine, ne pouvait logiquement convenir à d'autres cercles que les parallèles.

La division de l'écliptique est attestée par des textes de basse époque, des tables lunaires ou planétaires, datant des trois derniers siècles avant l'ère chrétienne. Ces tables se rattachent à deux principaux systèmes celui de Kidinnu (Κιδηνᾶς)[2] et celui de Nabû-rêmanni (Ναβουριανός)[3]. Schnabel a essayé de fixer l'antiquité respective de ces deux systèmes (cf. ZA XXXVII, pp. 7 ss.) : le plus ancien, celui de Nabû-rêmanni, serait postérieur à la prise de Babylone par Cyrus.

Dans le système abstrait de numération, le *geš* était écrit 1, le *bêru* était écrit 30, et l'unité de l'ordre immédiatement supérieur désignait 2 *bêru*, soit $\frac{1}{6}$ de jour. C'est là ce qui a fait croire à une division du jour en six parties[4]. Mais il ne faut pas confondre mesure et expression numérique de la mesure. Lorsque, dans les textes astronomiques, sont comptés non plus seulement des fractions du jour, mais aussi des jours entiers, le chiffre 1 désigne un jour et l'unité de l'ordre immédiatement inférieur désigne $\frac{1}{60}$ du jour (voir Kugler, *Sternkunde*, I, p. 148). Cependant le jour n'a jamais été divisé en soixantièmes.

1. Le *geš* se divisait en 60 GAR (voir le texte transcrit par Weidner, *Alter und Bedeutung der babyl. Astron.*, p. 67, et les observations de Kugler, *Sternkunde*, II, p. 535). Le GAR est une mesure de longueur (de 12 coudées), qui a été empruntée par le système des mesures de temps, comme le *bêru* et le *geš* itinéraires ont été empruntés par le système des mesures de longueur. Le GAR, mesure de longueur, est le $\frac{1}{60}$ du *geš* itinéraire.

2. Voir Cumont, *Florilegium Melchior de Vogüé*, pp. 159 ss.; Kugler, *Im Bannkreis Babels*, p. 122.

3. Voir Schnabel, *Berossos*, p. 222.

4. Voir Epping, *Astron. aus Babylon*, p. 183, et Kugler, ZA XV, p. 383 s.

La division de l'écliptique était exprimée en chiffres abstraits, exactement comme la division du jour : le degré[1] ou $\frac{1}{360}$ de l'écliptique était écrit 1, et le *bêru* ou $\frac{1}{12}$ de l'écliptique était écrit 30. Parfois, après 30, on lit *bêru* ou 1 *bêru*, qui, comme l'a montré Kugler (*Babyl. Mondrechnung*, p. 146, et *Sternkunde*, I, p. 148), est une sorte de glose; *30 bêru* ou *30 1 bêru* signifie non pas « 30 (fois) 1 *bêru* », mais 30 (degrés, c'est-à-dire) 1 *bêru*.

Dans le système que nous venons de décrire, il n'y a aucune place pour l'*ammatu* et l'*ubânu*, mesures angulaires. D'où proviennent ces mesures dont l'origine est certainement distincte de celle de la division du cercle? On peut conjecturer qu'elles étaient en rapport avec une grandeur donnée par la nature et que cette grandeur était le diamètre apparent du soleil. Le diamètre moyen est d'environ 32′, mais une tradition chaldéenne, recueillie par les astronomes grecs, l'évaluait à 30′. Aristarque de Samos, par exemple, comptait 720 diamètres dans l'écliptique et par conséquent dans l'équateur[2]. On ne peut douter que la paternité de cette mesure appartienne aux astronomes babyloniens qui l'ont apparemment obtenue, par le moyen de la clepsydre, au lever du soleil, lors de l'équinoxe. A la vérité, nous manquons à ce sujet de témoignages directs, mais nous savons que les Babyloniens comptaient 720.000 *bêru* itinéraires dans l'équateur, et tout fait penser que, s'ils ont fait choix de ce chiffre, c'est parce qu'ils croyaient le diamètre du soleil contenu 720 fois dans le cercle qu'il décrit au temps des équinoxes[3]. Si le diamètre apparent du soleil est de 30′, l'*ubânu* serait le 1/6 du diamètre, l'*ammatu* de 24 *ubânu* correspondrait à quatre et l'*ammatu* de 30 *ubânu* à cinq diamètres solaires.

Dans l'ordre des mesures de longueur, la coudée de 24 doigts n'est attestée qu'assez tardivement. La coudée ancienne comptait 30 doigts. L'emploi d'une coudée de 30 doigts, comme mesure angulaire, serait un indice certain de la haute antiquité du système[4].

1. Nous ignorons encore comment les Babyloniens appelaient le degré de l'écliptique. Il est, *a priori*, très probable qu'ils le désignaient par le même nom que le degré de temps (en sumérien *geš*). Il est douteux que le signe *KI* qui parfois suit le chiffre exprimant le nombre des degrés soit un idéogramme désignant le degré, comme Kugler l'a suggéré, d'ailleurs avec hésitation (*Sternkunde*, I, p. 147).

2. Voir Letronne, *Journal des Savants*, 1817, pp. 741 et 745; Wolf, *Handbuch der Astron.*, I, p. 446, et Kugler, RA XI, p. 20.

3. Voir RA XI, p. 20 (Kugler), et RA XXVII, p. 54, note 2.

4. Cette note sur la coudée et le doigt, comme mesures astronomiques en Babylonie, serait incomplète si nous ne rappelions que les Babyloniens mesuraient en « doigts » (comme nous le faisons encore) la grandeur des éclipses. Mais la grandeur de ce doigt est inconnue, voir à ce sujet Kugler, *Sternkunde*, II, pp. 17 et 61 s.