2

LETTRE

A MONSIEUR LE PRINCE D. B. BONCOMPAGNI

SUR DIVERS POINTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

PAR M. CHARLES HENRY.

EXTRAIT DU *BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE.*
TOMO XX. — AOÛT 1887.

ROME
IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
Via Lata, N.° 3.
1888

LETTRE

A MONSIEUR LE PRINCE D. B. BONCOMPAGNI

SUR DIVERS POINTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

PAR M. CHARLES HENRY.

EXTRAIT DU *BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE*.
TOMO XX. — AOÛT 1887.

ROME
IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
Via Lata, N.° 3.
1888

LETTRE

A MONSIEUR LE PRINCE D. B. BONCOMPAGNI

SUR DIVERS POINTS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES.

Monsieur le Prince,

Le n° de décembre 1886 du *Bullettino* renferme de M. J. Dupuis, une note concernant le passage géométrique du *Ménon*, sur laquelle je vous prierais de me permettre quelques remarques.

« Promets-moi de rechercher par manière d'hypothèse, dit Socrate à Ménon, si la vertu peut s'enseigner ou si on l'acquiert par quelque autre voie. Quand je dis par manière d'hypothèse, j'entends cette méthode d'examen ordinaire aux géomètres. Lorsqu'on les interroge sur un espace, par exemple, et qu'on leur demande s'il est possible d'inscrire ce triangle dans ce cercle (*εἰ οἷον τ' ἐς τόνδε τόν κύκλον τοδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι*), ils vous répondront: Je ne sais pas encore si cela est ainsi, mais en faisant l'hypothèse suivante, elle pourra nous servir pour la solution du problème (*πρὸς τὸ πραγμα*). [Ici se présente le passage difficile dont voici le texte:] Εἰ *μέν ἐστι τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον, οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα, ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ, ἄλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ, καὶ ἄλλο αὖ, εἰ ἀδυνατόν ἐστι ταῦτα παθεῖν.* »

M. Dupuis remarque avec raison que presque tous les commentateurs ont traduit à tort « *τοιούτῳ χωρίῳ οἷον* » par un « espace aussi grand que » au lieu de « un espace tel que ». Mais il a tort de dire que rien dans le texte considéré ne motive l'hypothèse particulière que le triangle est rectangle: cette hypothèse s'impose, car quelques instants auparavant Socrate priait Ménon de tracer des triangles rectangles: il est naturel qu'il continue à les prendre pour exemples dans ses considérations géométriques: d'ailleurs les mots « *τόν δε τόν κύκλον* », « *τόδε τὸ χωρίον* » désignent *ce* cercle, *cet* espace, et non *tel* cercle, *tel* espace, comme traduit M. Dupuis.

M. Dupuis considère donc le triangle comme quelconque, et il écrit: « On demande s'il est possible d'inscrire tel triangle dans un cercle. En supposant le problème résolu, on voit que les trois côtés du triangle soustendent la circonférence. Donc, pour répondre à la question, les figures étant supposées mobiles, il faut appliquer le triangle *sur le cercle* de manière qu'un de ses côtés soustende *la circonférence* : si les deux autres côtés la soustendent aussi, c'est-à-dire si le sommet opposé au premier côté tombe sur la circonférence, le triangle est inscriptible; s' il tombe à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle, le triangle ne l' est pas. La seule explication mathématique admissible exige donc qu' on prenne pour τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν, *la circonférence donnée du cercle*, αὐτοῦ étant mis pour τοῦ κύκλου, le cercle désigné dans la demande. Le mot κύκλος étant trop éloigné pour que αὐτοῦ puisse s'y rapporter grammaticalement, nous proposons de remplacer αὐτοῦ par τοῦ κύκλου qui dans les anciens manuscrits est souvent representé ainsi τȣ ○, ce qui a pu tromper les copistes du moyen âge . . . »

Quand on a un problème à résoudre, il est évident qu' on n'a pas le droit de changer les termes de l'énoncé : de même pour un texte obscur : ce n'est qu'à la dernière extremité et quand il y a pleine évidence, qu'on doit proposer des corrections d'ailleurs toujours faciles. Or, je ne vois pas bien comment les copistes du moyen-âge auraient confondu τȣ ○ avec αὐτοῦ; passe encore si le ○ précédait τȣ; mais il le suit. En conséquence, je rejette absolument l' hypothèse. Mais voyons la traduction : « Si cette figure triangulaire est telle qu' étant appliquée *sur la circonférence donnée*, elle laisse (entre les deux figures) un espace soustendu (c'est-à-dire un espace formé de trois segments dont les côtés du triangle soustendent les arcs), il en résulte à mon avis telle chose; et telle autre chose, si la condition n' est pas remplie. »

Cette traduction ne répond pas au texte (je ne dis rien de la naïveté extrême de la condition d'inscriptibilité qui n'est pas très flatteuse pour Socrate): en effet, voici le mot à mot : *si à la vérité cet espace est tel que sur la ligne donnée de lui-même [le] contre-tendant, manquer (il manque) d'un tel espace qu' il soit lui-même l'espace placé à côté*: mot à mot qui, sans aucun changement dans le texte, est parfaitement clair. En effet, soient A, la surface du triangle, l la base et d le diamètre du cercle dans lequel il s'agit d'inscrire le triangle : en conséquence la hauteur sera $\frac{2A}{d}$, d égalant l; il est évident que la limite d' inscriptibilité du triangle se présente quand la hauteur égale le rayon, $\frac{2A}{d} = \frac{d}{2}$ ou $A = \left(\frac{d}{2}\right)^2$, c'est-à-dire *quand la surface du triangle transformé en carré pourrait recevoir à côté d' elle un carré rigoureusement égal*.

Je m' empresse d' ajouter que cette interprétation n'est pas de moi : elle est de l'illustre Woepcke qui la publia en 1856 dans la *Zeitschrift* || *für das* || *Gymnasial Wesen* || *herausgegeben* || *von W. Hirschfelder, F. Hofmann, P. Rühle.*||*X. Jahrgang* || *Berlin* || *Weidmannsche Buchhandlung*, pages 879-880.

La lecture de ce lumineux article eût épargné des peines inutiles à bien des commentateurs.

Permettez-moi, Monsieur le Prince, de passer maintenant à un autre sujet et de vous soumettre de remarquables observations inédites sur l'histoire des mathématiques hindoues que je dois à un savant orientaliste français : elles se rapportent aux *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik* de M. Cantor, et compléteront l'article que M. Favaro a consacré dans le *Bullettino* à ce bel ouvrage.

Page 506. Il y aurait des réserves à faire sur cet abrégé de l'histoire indienne. Exact d'une façon toute générale, il contient du louche dans les nuances et de l'inexact quant au détail. Ainsi Kanishka n'est nullement une grande figure légendaire, même dans la tradition bouddhique. Son ambassade à Marc Antoine et la présence de ses troupes à Actium est une supposition de ceux qui le font vivre à cette époque. En réalité, on ne sait pas, à cent ans près au moins, où le placer, bien qu'on s'accorde maintenent assez généralement à voir en lui le fondateur de l'ère dite Çaka, qui correspond à l'an 78 après J. C.

P. 512. La question de la numération décimale écrite est bien traitée. Il est juste que nous n'avons aucun témoignage antérieur au Sûrya-Siddhânta et à Âryabhata (ce nom n'a qu'un seul *t*) que les Hindous ont connu la valeur de position (1). Pour un témoignage que l'on croit avoir trouvé dans un écrit *prétendu* plus ancien, je vous renvoie à un article de la *Revue critique*, 18 avril 1881, p. 303. J'ajoute seulement :

1° dans la description (page 515) du système de numération inventé par Âryabhata afin de pouvoir exprimer le plus de nombres possibles avec le moins de sons, l'auteur s'excuse à tort d'avoir employé le mot zéro. Il ne fait en cela que ce qu'a fait Aryabhata lui-même dans le passage en question. Un ordre d'unités manquant, est un effet appelé *kha*, c'est-à-dire, espace, vide, un des synonymes de çûnya, 0. Qu'il s'agisse là d'un signe tel que notre 0, ou d'un simple point, ou d'une colonne laissée vide comme dans le calcul de l'abacus, peu importe. Ce passage à lui seul suffirait pour établir qu'Âryabhata connaissait le valeur de position.

2° la façon même dont il est parlé dans ce passage de la valeur de position, implique qu'elle était connue et bien connue depuis longtems.

---

(1) M. Léon Rodet signale chez les Télingas une notation, d'après laquelle les fractions sont exprimées par les puissances successives de *un quart*, comme nos fractions décimales le sont par les puissances successives de *un dixième*. (*Journal Asiatique*, 8e Série, tome IX, Avril-Mai-Juin 1887, page 533).

3.° Par conséquent, il n'y a pas lieu d'attacher une grande importance au fait purement négatif que, dans les monuments écrits, inscriptions, monnaies, la numération décimale écrite ne paraît pas plus tôt; même plusieurs siècles après on ne s'en servait pas d'avantage, et il faut descendre jusqu'au IX^{e} siècle environ pour la trouver dans les textes épigraphiques.

4.° Il est bien établi maintenant que les chiffres indiens ne sont pas les initiales des noms de nombres. L'auteur n'a pas connu les travaux du pandit Bhagvānlāl Indraji. (*Indian Antiquary*, t. VI, p. 42, et *Journal of the Roy. As. Society Bombay*, *Transactions*, t. XII, 1876.) qui mettent ce fait hors de doute.

P. 541. Il est bien vrai que les Çulvasûtras peuvent être (bien que cela ne soit pas probable) postérieurs à notre ère; mais la supposition que Pânini aurait vécu au II^{e} siècle après J. C. est tout-à-fait improbable.

P. 559. La remarque que les Hindous ont travaillé la trigonométrie avec plus de succès que la géométrie est fort juste. Si l'auteur avait pu connaître la partie non encore traduite d'Âryabhata, il aurait peut-être encore davantage insisté sur ce fait. Âryabhata qui a fait de si grosses méprises dans la mesure des solides, fait un emploi très-ingénieux de la géométrie du cercle. Cela vient à l'appui de cette opinion de l'auteur, que la géométrie des Hindous est avant tout astronomique.

Mon ignorance du sanscrit ne me permettant pas d'avoir un avis sur ces problèmes, pour pouvoir rester dans l'Inde, je dois mettre à profit la science de mes amis: c'est ce que vous voudrez bien, Monsieur le Prince, me permettre de faire pour les signes des planètes.

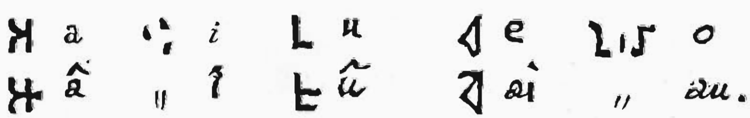
Il est peu de notations aussi répandues; popularisées par les almanachs, elles sont encore employées par les botanistes qui ont choisi le signe de Mars ♂ pour désigner les plantes bisannuelles, le signe du Soleil ☉ pour les plantes annuelles, le signe de Jupiter ♃ pour les plantes herbacées vivaces, celui de Saturne ♄ pour les arbres. Letronne a cru pouvoir affirmer qu'elles n'étaient pas antérieures au dizième siècle, mais on trouve le signe de Mars sur un grand nombre de monnaies sassanides, tantôt au dessus de l'autel symbolisant le feu, tantôt sur le bonnet des rois. Toutefois ces notations ne sont pas universellement usitées au moyen-âge. Les cabalistes les remplaçaient par certaines lettres de l'alphabet hébreu et quelquefois par certains caractères de l'*alphabet céleste* très ressemblants avec la notation instrumentale appliquée aux planètes par Pythagore. Chez les astrologues arabes la lettre finale de chacune des cinq planètes marquée d'un trait transversal était d' un usage commun ; mais il y avait encore d' autres notations empruntées aux alphabets dits *simiaques*.

D'où viennent ces signes ? D'après Saumaise, ils ne sont que des sigles de leurs noms en grec; d'après J. L. Frisch ce sont des symboles. Chacune de ces opinions est exclusive; un examen un peu approfondi conduirait certainement à admettre la première pour certains signes, la seconde pour d'autres. Mais voici qu'une nouvelle conjecture nous vient de l'Inde et, comme elle a déjà séduit quelques esprits amoureux des transmissions lointaines, c'est cette thèse que je vais , si vous voulez bien me le permettre, exposer et réfuter. Je dois à la complaisance de M. Léon Rodet et la connaissance de la conjecture et les principaux traits de la critique.

D' après M. Alexander Cunningham (1), les signes planétaires peuvent être formés en ajoutant simplement une étoile aux lettres radicales des cinq classes de l'alphabet d'Açoka, tandis que le soleil et la lune sont de véritables lettres radicales de deux autres classes de l'alphabet indien. Pour l'intelligence des rapprochements du savant indianiste , voici l' alphabet indien du temps d'Açoka, d'après la planche XXVII du *Corpus*, et les signes des planètes.

Alphabet d'Açoka.

A. *Voyelles initiales*.



Consonnes.

(1) *Corpus inscriptionum indicarum*, vol. I. Calcutta 1877, pag. 62, planches XXVII et XXVIII.

B. *Signes des planètes.*

Th	T	R	M	Kh	Th	S
Soleil	Lune	Mars	Mercure	Jupiter	Vénus	Saturne

1° Le *Soleil* serait représenté par la dentale aspirée *tha* d'Açoka qui est un cercle avec un point au milieu, et *tha* serait un des noms sanscrits du Soleil.

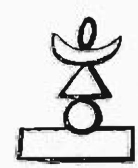
Or, si nous consultons le dictionnaire de Böhtlinck et Roth, nous trouvons les sens suivants pour *tha* : « *masc* : montagne ; un protecteur contre le danger ; l'indice d'un danger ; une certaine maladie ; le manger ; *neutre* : protection, préservation; crainte; prière pour la santé de quelqu'un ». Y a-t-il dans tous ces sens une caractéristique assez claire du Soleil pour qu'on ait choisi la lettre *tha* ? Evidemment non.

2° La *Lune* serait représentée par la palatale *ja* d'Açoka qui a la forme du croissant de la Lune avec un petit cercle à l'intérieur. Ce dernier, appelé *netrayoni*, est un des noms sanscrits de la lune ; *jut* est aussi un nom de la Lune.

Les sens sont exacts; mais la ressemblance entre le *ja* et le signe planétaire est problématique, comme on peut s'en convaincre facilement en recourant au tableau A. L'auteur l'a si bien senti que dans le tableau B il rapproche le signe du *ta* qui y ressemble bien plus.

3.° *Mars*. Le signe de la planète serait la semi-voyelle *ra* composée avec une étoile ou croix dressée ; *ra* est le radical pour *feu* qui serait l'élément auquel préside le régent de la planète.

Le rapprochement est cette fois exact, sinon vrai; *ra* est bien le nom symbolique du feu et des « ardeurs des sens ». D'ailleurs on sait qu'en Chine sur le tombeau des bouddhistes on met une pierre de la forme ci-contre et on inscrit tout en haut sur la flamme *en sanscrit* : *kha*, « l'éther » ; sur le croissant *ka*, « le » vent » ; sur le triangle *ra*, « le feu » ; sur la sphère *va*, « l'eau » ; sur la base, *a*, « la terre ». Mais où l'auteur a-t-il pris l'attribut qu'il accorde à ce gérant de la planète ? Le grand traité d'Astrologie de Varâha-Mihira soigneusment compulsé par M. Léon Rodet ne lui a offert aucune confirmation de l'assertion de M. Cunningham.



4.° *Mercure*. Le signe de cette planète serait la labiale *m* d'Açoka avec une étoile ou croix en dessous : *marka* et *marut* seraient des noms sanscrits pour le vent, au quel préside le régent de la planète Mercure.

Le mot *marka* par malheur ne désigne pas le phénomène météorologique, mais des phénomènes physiologiques, l'air inspiré et expiré, etc.; les *marut* sont spécialement les brises bienfaisantes qui aident Indra à dissiper l'orage. Ce mot ne peut désigner l'élément vent.

5.° *Jupiter*. Le signe de cette planète serait la lettre *Kh* d'Açoka avec une étoile attachée au pied droit. *Kha* serait le radical sanscrit pour *éther* ou ciel, l'élément sur lequel préside le gérant de la planète, Jupiter.

Or, voici l'article du dictionnaire précité sur le régent de la planète Jupiter: « nom d'un dieu dans lequel l'activité du pieux à l'égard des dieux est personnifiée; Bṛhaspati est le priant, le sacrificateur, le prêtre, le porte-parole des hommes devant les dieux et leur défenseur contre les impies. Il apparaît ainsi comme le prototype du prêtre et de la dignité cléricale: il est aussi répresenté comme Purohita de l' assemblée des dieux ». Rien n' autorise dans ces titres *une régence de l'éther*.

6.° *Vénus*. Le signe de cette planète serait la lettre cérébrale *ṭha* d'Açoka avec en dessous une étoile attachée; *ṭha* signifierait le *chérisseur* ou *nourrisseur*.

Le dictionnaire est également muet sur cette signification: le nom de la planète *Çukra* veut simplement dire *brillant*.

7.° *Saturne*. Le signe de cette planète serait la sifflante palatale *ça* d'Açoka avec une étoile ajoutée en haut à gauche. Çani est le dieu de l'eau dont la caractéristique est le son *ça* (?)

Or, le nom de Çani est une abréviation de *Canaiçcara* « qui marche lentement » épithète parfaitement appropriée à la planète en question.

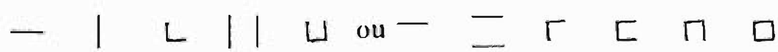
En résumé, indépendamment de son caractère essentiellement artificiel, cette hypothèse qui soude deux éléments comme une lettre et une étoile est en contradiction perpétuelle avec la linguistique; la conjecture de M. Cunningham est un jeu d'esprit laborieux qui ne méritait peut être pas aussi sérieuse considération.

Pour en venir à des sujets plus modernes, la question de l'origine de nos chiffres et de la valeur de position est trop intimement liée à l' étude des manuscrits de Boèce pour que toute donnée sur ces manuscrits ne soit pas accueillie avec intérêt. Les manuscrits latins 13020, 13955 et 14080 de la Bibliothèque Nationale de Paris contiennent d'après les catalogues la *Géométrie*; le premier est du IX^e^ siècle, les deux autres sont du X^e^, d'après M. Leopold Delisle: il était utile de les examiner. Je me suis convainçu qu' ils ne présentaient qu' un fragment de la *Géométrie*, commençant par la 2^e^ phrase de l'édition de la Géométrie de Boèce de Friedlein, page 373 et finissant à la ligne 15 de la page 389; donc pas d'Abacus. (n.° 13020, f.° 57 *r.*°).

Je viens de faire allusion à l'origine de nos chiffres dits arabes. On croit qu'ils sont universellement répandus maintenant. Il n'en est rien. Permettez-moi, Monsieur le Prince, de vous transmettre les renseignements que je dois à l'obligeance d'un mathématicien russe sur les notations qui les remplacent dans certains jeux et en particulier dans un jeu, fort répandu parmi les juifs polonais, qui le nomment « *Derdé* », jeu connu aussi avec quelques légères modifications dans certaines parties de l'Allemagne, où il s'appelle, à ce qu'il paraît: « *Franzenfuss* ». Il est joué avec 32 cartes; chaque joueur en a 9. Le nombre de points est déterminé surtout par les atouts qui valent 20, 40, 50, 100 ou 200. Celui qui atteint 500 a gagné.

Voici le système des chiffres de 10 à 100:

10 20 30 40 50 60 70 80 90 100



On voit qu'il n'y a que trois éléments, dont tous les autres sont composés à savoir —, | et ‾ et que 50 a deux signes. Comme toutes les autres, la figure ⊔ est composée; et ces signes ont ceci de caractéristique, qu'ils font reconnaître au premier coup d'œil les chiffres par l'addition desquels ils peuvent être formés.

Quand on doit écrire un chiffre un peu élevé d'un seul trait, on recourt à des formes plus cursives; on écrit ∨ au lieu de ⊔, <, au lieu de ⊏ et ∧ au lieu de ⊓; mais toutes ces figures, une fois complétées ▽ ◁ ou △, valent, comme figures fermées également 100. On reconnaîtra facilement, qu'ici encore le signe complémentaire vaut exactement ce qui manque à la centaine, souvent représentée par ○.

Ce système qui a la plus grande analogie avec des notations magiques et astrologiques rapportées par Henri Cornélius Agrippa dans sa *Philosophie Occulte* (j'ai sous les yeux la traduction française, La Haye, 1727, in-18, p. 285), ne suffit cependant pas à toutes les exigences du jeu. En effet, l'atout le plus faible valant 20, il ne serait pas possible de constituer une figure fermée avec cet élément seul. On a donc imaginé de disposer les 5 traits dans un ordre déterminé qui est celui-ci ; cette figure a, comme celles que j'ai eu l'honneur de vous mentionner la valeur 100.

J' arrive à un fait qui intéresse vivement la bibliographie des oeuvres de Pascal.

M. Charles Richet, m'a communiqué, il y a quelque temps, avec prière de l'examiner, une copie du traité de Pascal sur la *Machine arithmétique*, copie qui provient de son grand père Renouard, le célèbre bibliophile et philologue. Or je n' ai pas tardé à me convaincre que cette copie renferme nombre de pages inédites sur l'usage de la machine. Dans sa lettre à Christine de Suède Pascal écrit : « Je n' importunerai pas non plus V. M. du particulier de ce qui compose cette machine ; si elle en a quelque curiosité, elle pourra se contenter dans un discours que j'ai adressé à M. Bourdelot; j'y ai touché en peu de mots toute l'histoire de cet ouvrage, l'objet de son invention, l'occasion de sa recherche, l'utilité de ses ressorts, les difficultés de son exécution, les degrés de son progrès, les succès de son accomplissement et *les règles de son usage* » (1). Ces règles de son usage, Bossut n'a pu les retrouver; il le constate dans une note de cette page et elles ne figurent dans aucune édition postérieure. D'autre part, il est incontestable que Bossut a eu communication de papiers inédits : il le dit dans sa préface (tome I, p. 127) et on lit tome IV p. 449 cette note : « On a trouvé parmi les papiers de Pascal ces deux Porismes et le problème suivant écrits de la main de Fermat . . . . » En outre, dans une lettre autographe que j'ai eue entre les mains, Grosley lui écrit : « Ceux de la même famille avec qui votre édition des Oeuvres de Pascal vous a mis en relation . . . » Ces papiers provenaient sans doute de Dom Jean Guerrier, comme je l'ai noté dans mes *Recherches sur les manuscrits de Fermat* (2). La copie de M. Richet est certainement de la seconde moitié du 18^{e} siècle et les annotations marginales sont des collations avec un original. Le style est tout à fait conforme au style du 17^{e} siècle : l' exposition est beaucoup plus complète que celle de Diderot. En résumé, nous sommes en présence d'un inédit de Pascal, parvenu sans doute trop tard à Bossut pour qu' il puisse l' insérer dans son édition.

Page 9 d'un mémoire sur Galilée et ses disciples j'écrivais en 1880 (1), résumant des recherches faites à la Bibliothèque Nationale de Paris :

---

(1) Oeuvres, IV, p. 26. éd. Bossut.

(2) J'y cite pp. 80, note 8, et p. 81 ce curieux passage de D. René Prosper Tassin (*Histoire littéraire de la Congrégation de Saint-Maur*, 1770, page xiij, lig. 19) :

« Dom
» Jean Guerrier Curé et Prieur de S. Jean d'Angely
» ayant acquis de Mademoiselle Perier la bibliothèque
» du célèbre M. Pascal, son oncle, en envoya les Mss. au
» T. R. P. Général de Paris. »

(1) Reale Accademia dei Lincei ‖ Anno CCLXXII (1879—1880). — Galilée, Torricelli, Cavalieri, Castelli ‖ Documents nouveaux ‖ tirés des Bibliothèques de Paris. ‖ Roma ‖ Coi tipi del Salviucci ‖ 1880.

« Dans le ms. français 3282 (Nouv. Acq. de la même bibliothèque) se trouvent
» f.° 80 et f.° 78 deux copies d'une lettre de Torricelli éditée par M. Ghinassi et rap-
» portée par lui à l'année 1640 (1). Dans notre manuscrit cette lettre est datée du
» 11 juin 1620. On y trouve mentionnés deux problèmes de géométrie proposés à l'auteur
» par un père jésuite et des travaux « sur le mouvement de Galilée » que Torricelli
» aurait en ordre depuis plusieurs mois. Ces deux particularités rendent improbable la
» date de 1620. Torricelli n'avait alors que douze ans: d'autre part la date de 1640
» serait beaucoup trop avancée, puisque les premiers travaux de Torricelli antérieurs à
» coup sûr à l'année 1630 sont consacrés à la géométrie et à la mécanique (2). En
» conséquence, il nous faut substituer, ce nous semble, à la date de 1620 l'année 1630
» d'ailleurs intéressante elle même. On peut aussi conjecturer à peu près sûrement
» d'après plusieurs passages que le destinataire de cette lettre est Castelli, le maître
» et le protecteur de la jeunesse de Torricelli.

» (1) *Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli*. Faenza 1864, pag. 9.
» (2) *De motu gravium naturaliter descendentium et projectorum libri duo*
» *in quibus ingenium Naturae circa parabolicam ludentis per motum ostenditur*
» *et universa projectorum doctrina unius descriptione semi-circuli absolvitur*.
» (Opera geometrica Evangelistae Torricelli, p. 89, 1644.) »

J'ai retrouvé à la Bibliothèque Nationale de Florence (*Discepoli di Galileo* XL, f.° 79–80) parmi les documents concernant Torricelli les énoncés de ces deux problèmes suivis de leurs solutions géométriques et algébriques. Il s'agit de diviser une droite en deux parties 1.° de manière que la différence des carrés soit dans un rapport donné avec le rectangle compris entre ces mêmes parties; 2.° de manière que le rectangle compris entre la droite entière et le plus petit segment soit dans un rapport donné avec la différence des carrés des segments. La date de 1630 est donc confirmée par le caractère élémentaire de ces problèmes.

Ce manuscrit renferme la correspondance avec Mersenne: permettez-moi de prendre ici la défense du révérend père à propos d'une accusation qui n'est pas d'ailleurs extrêmement grave. Le regretté Th. H. Martin dans une lettre qu'il vous adressait le 10 avril 1870 sur un ouvrage faussement attribué à Aristarque de Samos (tome III du *Bullettino*, page 299, lig. 8 en remontant) croit que Mersenne a pu un seul instant être dupe de la fraude de Roberval. Il n'y a pas trace à ma connaissance de cette méprise dans la Correspondance de Descartes, la principale source, que l'on puisse consulter pour les opinions journalières de Mersenne; c'était même l'unique document, tant qu'on ne pouvait étudier la correspondance originale du savant minime si heureusement réintégrée à la Bibliothèque Nationale de Paris par les soins de M. Léopold Delisle. Je trouve au contraire dans une lettre que lui écrivit Descartes le 20 Avril 1646 (édition Cousin, tome IX, p. 551, l. 13):

« Je vous envoie ici quelques unes des fautes que
» j'ai remarquées dans l'Aristarque et je vous dirai
» ici, entre nous, que j'ai tant de preuves de la mé-
» diocrité du savoir et de l'esprit de son auteur, que
» je ne puis assez admirer qu'il se soit acquis à Paris
» tant de réputation. »

Page 555, lig. 7–1 en remontant et 556, lig. 1, on lit :

« Et c'est
» ce qui m'a empêché jusqu'ici de vous dire le juge-
» ment que je fais de cet Aristarque supposé que
» vous m'avez envoyé à ce dessein par deux diver-
» ses voies et dont j'ai reçu depuis longtemps les
» exemplaires. Mais puisque vous m'en priez de re-
» chef et que vous me faites la grâce de m'avertir
» que celui qui en est l'auteur . . . . . »

Pour en venir à des sujets d'intérêt actuel, je prendrai la liberté, Monsieur le Prince, de vous signaler dans un journal anglais moins lu des purs géomètres et des érudits que des physiciens, *Nature* (N.° 860, vol. 33, 22 avril 1886, p. 581) un article de M. J. J. Sylvester sur une découverte importante d'histoire des mathématiques.

M. Jordan dans le *Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique* tome I, p. 53–55 expose la méthode par laquelle M. Halphen est parvenu à l'équation différentielle des coniques:

$$-40y'''^3 + 45y''y'''y^{\mathrm{IV}} - 9y''^2y^{\mathrm{V}} = 0.$$

Cette méthode a été publiée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, tome IV, p. 64. Or cette formule n'est pas nouvelle.

Boole, dans son traité sur les Equations différentielles (1859, pages 19 et 20), avait attribué à Monge la formule

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 45\,\frac{d^2y}{dx^2}.\,\frac{d^3y}{dx^3}.\,\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0.$$

Des recherches pour retrouver dans les œuvres de Monge cette équation importante étaient restées infructueuses à Londres, à Cambridge, à Paris et l'on croyait assez généralement à une méprise de Boole, lorsque le Professeur W. W. Beman, de l'université de Michigan, U. S. annonça dans une lettre du 3 Avril 1886, adressée à M. Sylvester que la formule avait été retrouvée à la Bibliothèque du Collège de Yale dans le Mémoire de Monge « *Sur les équations différentielles des Courbes du second degré* » (*Correspondance sur l'École impériale polytechnique*, rédigée par M. Hachette, 1er cahier du 2e volume 1810, pages 51–54); et dans un résumé de ce mémoire publié dans le *Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris* (tome II, 1810 pp. 87–88). Moins de deux jours après, M. Sylvester recevait les mêmes renseignements de la Société *Universal Knowledge and Information*. Voici le résumé en question, fondamental pour l'histoire des réciprocants, comme on peut le voir dans la leçon inaugurale du célèbre professeur d'Oxford sur les réciprocants (*Nature*, 7 janvier, p. 222):

« Mathématiques. – Sur les équations différentielles des courbes du second
» degré par M. Monge.

» L'équation générale des courbes du second degré étant

$$» \quad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + Ex + 1 = 0,$$

» dans laquelle A, B, C, D, E sont des constantes, M. Monge donne l'équation
» différentielle débarrassée de toutes ces constantes et il parvient à l'équation
» suivante du cinquième ordre

$$» \quad (A) \qquad 9\,q^2 t - 45\,qrs + 40r^3 = 0,$$

» les quantités r, s, t, étant définies par les équations suivantes

$$» \quad \frac{dy}{dx} = p, \ \frac{dp}{dx} = q, \ \frac{dq}{dx} = r, \ \frac{dr}{dx} = s, \ \frac{ds}{dx} = t.$$

» Il fait ensuite voir l'usage de l'équation (A) pour trouver l'intégrale d'une
» équation d'un ordre inférieur qui satisfait à cette équation (A); ainsi étant
» donnée l'équation différentielle $(1+p^2)\,r = 3pq^2$, il parvient à l'intégrale $(x-a)^2$
» $+ (y-b)^2 = c^2$ qui est l'équation d'un cercle.

» La même méthode pourrait s'appliquer aux équations des courbes d'ordre supérieur au second. »

Depuis que cette page est réimprimée, M. le Professeur Cayley en une lettre que M. Sylvester a bien voulu me communiquer a signalé une formule réciproquante dans un mémoire d'Ampère: *Sur les avantages qu'on peut retirer dans la Théorie des Courbes de la considération des paraboles osculatrices, avec des réflexions sur les fonctions différentielles dont la valeur ne change pas lors de la transformation des axes.* (*Journal de l'Ecole polytechnique*, 1808, tome VII, page 173.) Cet illustre géomètre y donne pour le rayon de courbure l'expression

$$-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

pour le paramètre de la parabole osculatrice la formule

$$-\frac{54y''^5}{\left[y'''^2 + (3y''^2 - y'y''')^3\right]^{\frac{3}{2}}};$$

et pour le premier terme de l'équation qui détermine la position des paraboles osculatrices la quantité

$$\frac{5y'''^2 - 3y''y''''}{(1+y'^2)^4},$$

toutes fonctions qui ne peuvent changer de valeur par aucune transformation des axes.

Pour terminer cette lettre déjà trop longue, je noterai, Monsieur le Prince, une addition numérique qu'il importe de faire aux recherches que Woepcke a consacrées à votre importante découverte des manuscrits de Léonard de Pise.

J'ai rencontré l'omission, en préparant l'édition du célèbre commentaire de Fermat sur la question de Diophante qui concerne la résolution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

L'équation

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

z étant quelconque, avait été résolue par Pythagore, x étant impair, par Platon, x étant pair, par Euclide x et y étant tous deux pairs ou impairs.

La règle de Pythagore peut se résumer dans la formule :

$$[m + (m+1)]^2 + [2m\,(m+1)]^2 = [2m\,(m+1) + 1]^2.$$

La règle de Platon traduite en langage moderne est la suivante :

$$[(m-1)\;(m+1)]^2 + [2m]^2 = [m^2 + 1]^2.$$

Comme M. Genocchi l'a fait observer (*Comptes-rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris,* tome XL, 2 avril 1855) la solution d'Euclide revient à poser x et y deux nombres plans semblables, pairs ou impairs tous les deux, leur produit sera un carré z^2 et l'on aura :

$$z^2 + \left(x - \frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

On trouve chez un arpenteur romain, Marcus Junius Nipsus (1) une solution de l'équation

$$x^2 - y^2 = z^2$$

par un artifice analogue à celui de Diophante (2).

Il distingue deux cas : celui où z, le nombre entier donné, est pair et celui où il est impair.

1$^{\text{er}}$ *cas*. Soit z pair, $\frac{1}{2}z$ sera entier, ainsi que $\frac{1}{4}z^2$. Faites alors :

$$x = \tfrac{1}{4}z^2 + 1 \text{ et } y = \tfrac{1}{4}z^2 - 1\,;$$

x et y seront les nombres demandés, comme on peut aisément le vérifier d'après ces expressions.

(1) On peut consulter sur ce personnage *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst, von Dr Moritz Cantor*. Leipzig, Teubner, 1875, pp. 103, 112, 165.
(2) *Journal des Savants*, année 1849, p. 250—251 (art. de Biot).

2e *cas*. Soit z impair, z^2 sera impair et $z^2 + 1$ sera pair. Faites alors :

$$x = \tfrac{1}{2}(z^2 + 1) \qquad y = \tfrac{1}{2}(z^2 - 1)$$

x et y seront les nombres demandés, comme on peut le vérifier encore.

Le problème de Nipsus est reproduit, mais avec d'autres chiffres, par Abou Bekr Mohammed ben Alhaçan Alkarkhî (1).

Les règles de Pythagore et de Platon se retrouvent dans une règle pour la construction du triangle rectangle en nombres rationnels que M. Chasles attribue inexactement, paraît-il, à Brahmegupta (2) : enfin, en attendant Léonard de Pise, on les rencontre dans deux fragments anonymes sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, dont Woepcke publia la traduction dans ses *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le Prince Balthasar Boncompagni, et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes*. Première partie, III, Rome 1861, p. 21 et suiv. Les auteurs énoncent en termes explicites le problème des nombres congruents lequel consiste à satisfaire simultanément aux deux équations indéterminées

$$s^2 + k = u^2 \qquad (1) \qquad\qquad s^2 - k = v^2 ; \qquad (2)$$

s^2 étant le carré inconnu et k un nombre donné appelé congruent. Ils observent que les deux équations dépendent de la résolution de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ou de la théorie des triangles rectangles en nombres ; car en faisant

$$x = a^2 - b^2, \qquad y = 2ab, \qquad z = a^2 + b^2,$$

a et b étant premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair, ils ont :

$$s = z, \qquad k = 2xy, \qquad u = x + y, \qquad v = x - y$$

et conséquemment l'expression du nombre congruent

$$k = 4ab\,(a^2 - b^2).$$

L'un des auteurs arabes a calculé une table des expressions $x, y, z, z^2, 2xy, z^2 + 2xy, x + y, z^2 - 2xy, x - y$, et il trouve pour les nombres congruents de la forme $2xy$ dans les limites 5 – 10374 inclusivement vingt-neuf nombres congruents *primitifs*, c'est-à-dire débarrassés de tous leurs facteurs quadratiques. En réalité, il y en a 30 ; il faut ajouter à la liste

$$190 = 6840 : 36.$$

(1) *Extraits du Fakhrî* par F. Woepcke. Paris 1853, pag. 100. Liv. III, §. 37.
(2) *Aperçu historique*, page 426.

Or $6840 = 2xy$, c'est-à-dire est congruent pour $x = 19$, $y = 180$, $z = 181$; $33122 = z^2 + x^2$ est le double d'un nombre premier.

Je puis enfin compléter par un fait l'excellente notice que Mr. Henri Narducci a consacrée à Woepcke. La Société asiatique de Paris possède quelques manuscrits de ce savant et entre autres un petit manuscrit mathématique dont j'ai eu communication : 16 feuillets sont consacrés à la formation et à la transformation de la surface de la Terre (*Zusammensetzung und Verwandlung der Erdoberfläche*) ; en marge du titre on lit *Mitscherlich* 6. 5. 1845. Une analyse des mémoires géométriques de Steiner occupe ensuite 7 feuillets : 36 sont consacrés à des leçons de Calcul Intégral de Dirksen.

Veuillez agréer, Monsieur le Prince, l'hommage de mon respectueux dévouement.

CHARLES HENRY.