

**Alfred ERRERA**

Chargé de Cours à l'Université de Bruxelles.

---

# Sur l'Arithmétisation de l'Analyse

---

Leçon d'ouverture du cours : Questions spéciales d'analyse  
(Janvier 1927)

---

Extrait de la *Revue de l'Université de Bruxelles*  
n° 3, février-mars-avril 1927

---

**BRUXELLES**

IMPRIMERIE MEDICALE ET SCIENTIFIQUE (Soc. an.)  
34, rue Botanique, 34

---

**1927**

Bibliothèque Maison de l'Orient



135745

# Sur l'Arithmétisation de l'Analyse

PAR

ALFRED ERRERA

Chargé de Cours à l'Université de Bruxelles.

---

**Leçon d'ouverture du cours : Questions spéciales d'analyse.**

(Janvier 1927).

---

Au moment où l'Université me fait l'honneur de me charger d'un cours complémentaire d'analyse, mon esprit se reporte vers celui qui, le premier, m'apprit à placer la vérité par dessus toutes les autres préoccupations.

Léo ERRERA aimait et faisait aimer la science. Il s'y était adonné corps et âme, et l'on peut dire qu'il avait scruté toutes les branches du savoir humain, sauf peut-être la musique.

Je ne veux pas m'étendre sur ses grandes connaissances en physiologie végétale et en biologie; bien qu'un sort injuste l'eût enlevé trop tôt, ses découvertes eurent le temps de se répandre dans tout le monde intellectuel et, malgré des coups terribles et répétés, la Mort, qui frappe les individus, n'a pu annihiler son œuvre ni vaincre l'École qu'il a formée.

C'était un esprit universel, chose rare à notre époque; et je crois que s'il avait voulu devenir écrivain, car il maniait admirablement le français, ou philologue, lui qui connaissait plus de langues étrangères qu'on n'a coutume de le faire, ou surtout géomètre, son nom n'eût pas été moins connu que comme botaniste; je me souviens, avec une filiale gratitude, qu'il fut mon premier maître de mathématiques. Il avait d'ailleurs profité de son séjour à Strasbourg pour suivre les cours de NETTO; c'est vous dire qu'il connaissait le calcul infinitésimal, sur lequel on a trouvé dans ses notes plus d'une remarque judicieuse.

Son esprit très philosophique cherchait des liens entre toutes les parties de la science; telle fut l'origine de plus d'une de ses découvertes, notamment en physiologie moléculaire.

Lorsqu'il avait acquis une conviction, rien ne l'empêchait de l'exprimer; ainsi, après avoir écouté l'enseignement philosophique de TIBERGHIEU, il ne put se rallier au point de vue de ce spiritualiste; écoutez ce que raconta Paul HÉGER, lorsqu'on inaugura le buste de mon père à l'Institut botanique :

« ... Toute l'éloquence du maître (c'est-à-dire Tiberghien) discourant avec autorité sur les sujets les plus épineux, résolvant les problèmes de l'existence de Dieu et de la spiritualité de l'âme, ne parvint pas à le convaincre. »

» Quand vint le jour de l'examen, l'élève ne put se résoudre à jurer selon la parole du maître et à égrener devant lui, pour obtenir un diplôme, un chapelet d'arguments auxquels il ne croyait pas; vis-à-vis d'un professeur aussi justement respecté, la situation était embarrassante. Elle fut tranchée de façon imprévue: l'élève demanda l'autorisation d'exprimer et de défendre son opinion personnelle; et l'on vit TIBERGHIEU écouter avec bienveillance son jeune contradicteur; il lui octroya la plus grande distinction. La solution parut digne de l'élève et digne surtout du maître, donnant ce grand exemple du respect qu'il professait pour la liberté de la pensée. »

Ses connaissances variées, Léo ERRERA les avait acquises par un travail constant. D'ailleurs, il était minutieux en tout et, par exemple, lorsqu'il préparait une leçon, il ne laissait rien au hasard, répétant à l'avance la moindre expérience, avare du temps de ses élèves et prodigue du sien.

Dans une vie comme celle-là, les qualités morales prennent une importance prépondérante; ce sont elles qui donnent l'autorité. Plus d'une fois, saisis par le doute, des inconnus, même des prêtres catholiques, sont venus lui demander conseil; et c'est toujours vers la sincérité qu'il dirigeait les égarés.

Son ascendant s'alliait à une modestie, à une indulgence, à une patience que nous voudrions avoir à chaque instant présentes à l'esprit.

Son premier disciple fut son frère, Paul ERRERA. Bien que celui-ci se dirigeât dans une voie éloignée de la physiologie,

l'étude du droit, comme il le concevait, participait de la science pure. Après la mort de mon père, il fut pour moi un ami sûr et un guide affectueux.

Dans mon souvenir, l'un et l'autre s'identifient à l'Université libre de Bruxelles qu'ils aimaient également et dont ils surent respecter l'esprit.

Je voudrais m'étendre un instant sur le sens de ce qualificatif *libre*; je crois qu'il n'est pas purement homérique, ni surtout administratif! Quelle est donc la place de la liberté dans une institution comme la nôtre?

Je ne parle pas seulement de notre postulat fondamental: un membre de l'Université, maître ou disciple, est libre de ne pas accepter les idées d'un autre membre; et vous avez pu voir comment TIBERGHEN comprenait la liberté de conscience, la première de toutes.

Mais à côté du libre examen, il y a la liberté académique, dont la part, à mon sens, pourrait être plus grande.

On a dit et répété que le rôle d'une université est, d'une part, de faire progresser la science et, de l'autre, de former des savants, des professeurs et des techniciens.

Je pense qu'une pratique intelligente de la liberté individuelle favorise le mieux ce double rôle: liberté pour le savant de choisir son sujet d'étude et la manière dont il entend le traiter, pourvu seulement que cette étude soit sérieuse et qu'elle cherche à accroître le savoir humain; liberté pour l'étudiant de modifier son programme dans des limites raisonnables.

Mais on peut se demander ce que sera la liberté dans la méthode d'enseignement. Par exemple, peut-on, dans un cours, professer n'importe quoi? Je pense que non. Ainsi, on a vu parfois des maîtres exposer comme la vérité, des théories mal assises, des billevesées dont un peu de réflexion aurait fait éclater la vanité, des doctrines, qui, n'ayant pas été discutées ouvertement, n'étaient pas consacrées par la publication. C'est évidemment une exagération et une erreur, surtout si l'on s'adresse à des débutants, dont le sens critique n'est pas encore complètement développé.

Ici comme ailleurs, notre liberté est bornée par celle du prochain. Le maître n'a pas le droit d'abuser de la confiance implicite et légitime que le disciple lui apporte. Il doit res-

pecter le droit d'autrui et, en un certain sens, sa faiblesse : la pensée est libre, mais les actes ne le sont pas.

En revanche, apprendre à réfléchir et stimuler le sens critique de l'étudiant, augmentera sa liberté. Telle sera donc l'une des fonctions les plus importantes d'un enseignement universitaire.

Quand nous parlons de ce sens critique, entendons-nous bien : le tact du professeur consiste à ne pas étouffer l'enthousiasme sous une montagne d'objections, à ne pas décourager les jeunes volontés par le poids de l'âge et de l'autorité.

Rencontre-t-on un paradoxe qui paraisse nouveau, il mérite contrôle et réflexion ; une difficulté imprévue, il faut l'envisager sans parti pris ; et la sincérité, dont nous avons cité un exemple, nous force à accepter toutes les conséquences de ce qui nous paraît juste.

C'est dire que, dans le domaine mathématique, un travail assidu est nécessaire ; il faut étudier ce qui a été fait et réfléchir continuellement : « y penser sans cesse », disait NEWTON ; des lectures occasionnelles sont tout à fait insuffisantes ; la liberté de pensée implique d'abord qu'on pense !

Ce qui, dans les mathématiques, prend beaucoup de temps, c'est la construction en quelque sorte verticale ; pour parvenir aux plans les plus élevés, il faut traverser d'innombrables étages intermédiaires, même lorsque les progrès de la méthode nous fournissent l'ascenseur qui permet parfois d'arriver plus vite.

Peut-être ai-je tort cependant de comparer les mathématiques à un gratte-ciel ; car il s'agit plutôt d'une agglomération d'édifices de hauteur variable : l'analyse en sera le beffroi, la géométrie occupera quelque autre tour puissante ; et à côté de ces constructions élancées, les architectes ont bâti des pavillons nouveaux, dont vous pouvez, sans trop de peine ni de temps, connaître les détours.

C'est ainsi que l'on voit parfois les jeunes, même des étudiants, apporter leur pierre à ces demeures plus modestes et montrer ainsi que la découverte mathématique n'est pas seulement l'apanage d'hommes mûrs en même temps qu'érudits.

La science est une amante belle, sereine, consolatrice et généreuse. Quand d'ALEMBERT appliquait à l'algèbre ce der-

nier prédicat, s'il ne songeait sans doute qu'aux solutions étrangères qui surgissent *généreusement* dans les équations, combien cette parole est plus vraie lorsqu'on l'applique à toute la science !

La jeunesse l'aime pour elle-même; et afin de justifier cet amour, faut-il rappeler aux utilitaires que KEPLER et NEWTON portèrent jusqu'au ciel, inventant ainsi la mécanique si nécessaire à l'industrie, les ellipses dont PLATON et MENECHME avaient fait l'étude désintéressée ?

\*  
\*\*

Les Grecs de la grande époque, celle que LORIA appelle l'âge d'or, EUCLIDE, ARCHIMÈDE, APOLLONIUS, avaient fondé la géométrie sur des principes solides; et si quelques faiblesses se sont glissées dans leur enseignement, il a fallu plus de vingt siècles pour qu'on y mît bon ordre. On a renforcé, précisé certaines parties; mais dans l'ensemble, la géométrie élémentaire s'enseigne aujourd'hui comme alors: les méthodes sont les mêmes, beaucoup de propositions et de démonstrations sont les mêmes, et dans plus d'une figure, les lettres sont les mêmes.

A l'opposé, nous voyons l'analyse mathématique, dont les débuts furent peu rigoureux. Comme toutes les sciences, elle eut une origine pratique, les questions se posant à propos de problèmes de géométrie et de mécanique: cela se passait à la Renaissance. Mais aussitôt commença une sorte de lutte pour la suprématie de la raison sur l'intuition, de la démonstration sur la croyance; contrairement à la géométrie, ce ne fut cependant qu'au XIX<sup>m</sup>e siècle qu'on réussit à y introduire une rigueur, dont le besoin se faisait sentir chaque jour davantage.

Si CARNOT, dans sa Métaphysique de l'Analyse infinitésimale, disait encore que cette science n'est autre chose « qu'un calcul d'erreurs compensées », la phrase que FONTENELLE attribuait à d'ALEMBERT: « Allez en avant, la foi vous viendra », n'a plus cours aujourd'hui; car il ne s'agit pas de croire aux théorèmes de l'analyse, mais de les démontrer d'une manière irréfutable.

Je dois reconnaître que le besoin de certaines démonstrations n'apparaît pas toujours avec force à des étudiants; par exem-

ple, tel est le cas du théorème de JORDAN, d'après lequel, en particulier, on ne peut sortir d'un cercle sans en traverser la circonférence. Peut-être que, dans ces leçons, je soulignerai des difficultés auxquelles vous n'avez pas songé; je serai heureux s'il en est autrement, et que vous aussi demandiez que certaines questions soient reprises avec une précision nouvelle.

Quand on parle de mathématiques pures, ou en général de sciences abstraites, et ceci s'applique également bien à la physique mathématique, on pense, dit M. GONSETH, « aux sciences que l'on construit par l'application des règles de la logique à partir de certains faits fondamentaux ».

Dans ce sens, l'analyse a subi, au cours du siècle dernier, deux sortes d'épuration que l'on caractérise par les mots un peu pesants d'*arithmétisation* et d'*axiomatisation*. On veut dire par là que les faits mathématiques sont ramenés aux seuls nombres régis par les seuls axiomes.

Cette refonte a été commencée par CAUCHY en France, par GAUSS en Allemagne.

Quand GAUSS disait que « les mathématiques sont la reine des sciences et l'arithmétique la reine des mathématiques », il y comprenait l'algèbre et l'analyse, mais pas la géométrie ni la mécanique. Il voyait dans le nombre, le seul fondement de ces royales disciplines, le nombre, pure abstraction de notre esprit, alors que l'espace et le temps, nécessaires à la géométrie et à la mécanique, participent de quelque réalité extérieure à nous.

Remarquons déjà que, par nombre, GAUSS veut dire exclusivement le nombre au sens le plus étroit, le nombre fini, abandonnant une fois pour toutes les quantités infiniment grandes ou infiniment petites. Dans une lettre à SCHUMACHER, il proteste énergiquement contre l'infini actuel; d'après lui, l'infini n'est qu'une « façon de parler » (les mots sont en français dans sa lettre), en ce sens qu'il s'agit de rapports variables, dont les uns s'approchent d'une limite et dont les autres croissent sans limite.

Fonder effectivement l'analyse sur les nombres entiers finis, tel fut le but de ses continuateurs, dont nous citerons WEIERSTRASS, plus encore DEDEKIND et surtout KRONECKER.

DEDEKIND voulait relier les nombres irrationnels aux seuls

nombres rationnels, c'est-à-dire en fin de compte aux nombres entiers, en définissant chaque nombre irrationnel comme dépar tageant en deux systèmes l'ensemble de tous les nombres rationnels. C'est ce qu'on appelle une coupure de DEDEKIND, un nombre irrationnel n'étant plus que le symbole de cette coupure.

KRONECKER alla beaucoup plus loin; non seulement il croyait que toute définition mathématique devait se vérifier par un exemple que fournirait un nombre fini d'opérations arithmétiques, mais aussi, que tout théorème d'analyse n'était que la traduction d'un théorème d'arithmétique, traduction que d'ailleurs il jugeait inutile et nuisible.

« Le bon Dieu », a-t-il dit, « a fait les nombres entiers; tout le reste est œuvre humaine ». Phrase fameuse, mais à laquelle nous ne voulons pas souscrire, et non pas pour sa forme mystique; mais nous avouons ne pas comprendre, comment on pourrait remplacer cette traduction infinitésimale par ce que KRONECKER considérait comme l'original arithmétique, lui qui voulait extirper de l'analyse les modifications et les extensions du concept du nombre entier.

C'est d'ailleurs lui qui inventa le mot d'arithmétisation, et ce fut pour en critiquer l'application par ses contemporains qu'il jugeait trop timides. En revanche, dans une lettre à Sophie KOWALEWSKA, WEIERSTRASS trouvait que KRONECKER manquait de fantaisie et n'était pas assez poète!

Jusqu'à un certain point, cette manière de querelle, qui semblait opposer deux thèses, n'était qu'une divergence sur une question de plus ou de moins, ainsi que POINCARÉ l'a fort bien souligné; et l'on peut accepter avec VOSS que le travail d'une grande partie du XIX<sup>m</sup>e siècle, consista « à établir le concept du nombre entier et de ses opérations, comme l'unique fondement de toute connaissance mathématique ».

Mais ce nombre entier lui-même, quelle est sa nature? Autrement, on le considérait comme une grandeur. Cela, c'est une de ces idées vagues et plus ou moins intuitives. Maintenant, le nombre, ce n'est plus qu'un signe, un symbole, une pure abstraction de l'esprit, avons-nous dit. Ses lois fondamentales une fois acceptées, il nous permet, bien entendu, de mesurer les grandeurs de la nature; et en cette adaptation à la réalité,

réside la différence entre les conventions mathématiques et celles du jeu d'échecs.

La seconde méthode pour épurer l'analyse porte, depuis HILBERT, le nom d'axiomatique : afin d'éviter les données imprécises de l'intuition, on convient d'énumérer explicitement les axiomes ou postulats permettant de démontrer les théorèmes.

C'est ce qu'EUCLIDE avait compris depuis longtemps et fait pour la géométrie, d'une manière imparfaite, il est vrai, mais admirable, quand on songe à l'époque où il vivait.

C'est ce que FREGE, puis HILBERT et d'autres ont réalisé pour l'arithmétique.

Par ce moyen, on sait d'où l'on part et ce qu'il faut admettre sans preuve. Il n'y a plus rien de caché; nulle tricherie dans les démonstrations.

Vous me direz qu'on peut refuser des postulats; je vous répondrai que personne n'est obligé de jouer aux échecs, mais que si l'on joue, on accepte les règles du jeu. En mathématique, sitôt le pacte conclu, on est pris dans l'engrenage.

D'ailleurs, et POINCARÉ l'a dit clairement, les fondements de l'arithmétique ne sont pas arbitraires; c'est ce qui fait des mathématiques une science universelle et non pas contingente. L'abandon de l'intuition et de l'expérience sensible, qui, parfois, nous trompent, nous permet donc de raisonner avec rigueur; et les conclusions ne peuvent plus être refusées.

Celui qui déterminerait la valeur du nombre  $\pi$  par des mesures physiques, ou par des expériences fondées sur le calcul des probabilités, pour ne point parler de la mensuration de monuments soi-disant prophétiques, n'entraînerait pas la conviction, comme celui qui en a calculé les décimales par un développement en série.

« La logique », a dit encore POINCARÉ, « qui peut seule donner la certitude, est l'instrument de la démonstration; l'intuition est l'instrument de l'invention ».

Ainsi comprise, l'axiomatisation complète l'arithmétisation : celle-ci ramène explicitement toutes les définitions au nombre entier; celle-là définit en quelque sorte implicitement le nombre entier par ses postulats.

La raison seule a donc conquis tout le champ de bataille et elle peut proclamer l'analyse, fille aînée de la logique.

\*  
\*\*

Et maintenant, vous croyez peut-être que, par ces grands architectes qui ont dressé leurs édifices suivant les plans du plus élégant urbanisme, tout est devenu commode, clair, indestructible. Hélas ! par un de ces retours fréquents dans l'histoire de la pensée, voici que des génies, faut-il dire de bons ou de mauvais génies ? ont miné le sol sous les fondations, au risque de faire crouler les constructions les plus solides et jusqu'à l'arithmétique elle-même.

Nous avons vu que DEDEKIND avait défini le nombre irrationnel, comme une coupure dans l'ensemble de tous les nombres rationnels, ceux-ci n'étant que des combinaisons de nombres entiers. Mais à bien regarder les choses, on s'aperçoit qu'il reste un petit peu plus que l'idée du nombre entier. Ce résidu quel est-il ? C'est l'idée de tous, de l'ensemble, l'idée d'infinité ; c'est l'universelle des logiciens.

Déjà, le vieux PYTHAGORE avait compris que les nombres irrationnels introduisaient une difficulté ; ZÉNON avait secoué les philosophes en soulevant ses étranges paradoxes ; ARCHIMÈDE, enfin, avait attaqué résolument le problème et jeté les fondements de la théorie des limites, en inventant, pour la quadrature de la parabole, la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire une forme primitive d'intégration.

La difficulté, c'est de nouveau cette idée d'infini, dont GAUSS ne veut pas entendre parler, mais qui surgit malgré lui, malgré nos digues les plus puissantes, puisqu'il y a une infinité de nombres entiers et que les carrés ont des diagonales !

Ce ne fut que Georges CANTOR, le génial inventeur de la théorie des ensembles, qui sut étudier les classes infinies, d'une manière à la fois systématique et harmonieuse. Grâce à lui, l'infini reprit droit de cité dans l'analyse, non pas sous la forme naïve d'autrefois, mais aussi comme un symbole ayant ses lois, obéissant à ses postulats. Et ce symbole est irréductible à celui du nombre entier fini.

Le « cantorisme » a soulevé de vives polémiques, dont les échos ne se sont pas encore tus aujourd'hui. Mais celui qui

est allé le plus loin dans la tendance anticantorianne, c'est M. BROUWER, d'Amsterdam, un disciple de KRONECKER.

Il a tiré les ultimes conséquences de certaines thèses de l'illustre arithmétisant berlinois et il a montré alors, que non seulement on est obligé d'abandonner la plus grande partie de l'analyse et de la théorie des ensembles, mais que la logique elle-même en est ébranlée : car le principe du tiers exclu cesse d'être universellement vrai.

Et M. BROUWER s'est bravement mis à la tâche, pour reconstruire les mathématiques sans employer ce principe vénérable que nous dicte notre raison, sans admettre qu'une proposition est toujours vraie ou fausse, qu'un nombre est rationnel ou irrationnel.

M. BARZIN et moi pensons avoir démontré que ces positions aventurées ne sont pas tenables, et que déjà KRONECKER était allé trop loin dans certaines de ses exigences.

C'est donc sans aucun scrupule que je parcourrai avec vous des chapitres de l'analyse classique et que je suivrai CANTOR, tout au moins sur le terrain des mathématiques, sinon sur celui de la religion. Ne considérerait-il pas, en effet, l'horreur de l'infini, comme un crime contre la nature des choses, qui rejoignait dans son esprit l'horreur du Divin, dont il accusait une époque d'épicurisme matérialiste !

Cela veut-il dire qu'en acceptant la théorie des ensembles, nous allons rejeter l'arithmétisation ? certainement non. Mais reconnaissons que le nombre entier n'est pas toute l'analyse, que la mathématique sans la logique n'est pas la mathématique, et que la logique sans la raison n'est pas la logique.

---