ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

EXTRAIT DES BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

Séance du 8 janvier 1927, pp. 56-71

Sur la Logique de M. Brouwer

PAR

M. BARZIN & A. ERRERA

BRUXELLES

MARCEL HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

112, Rue de Louvain, 112

1927

A Monsieur Salomon Reinach
Déférent hommage des auteurs
Marcel Barzin
A Errera

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

Extrait des *Bulletins de la Classe des Sciences*. Séance du 8 janvier 1927, n° 1, pp. 56-71.

MATHÉMATIQUE ET LOGIQUE. — **Sur la Logique de M. Brouwer,**

par MM. M. BARZIN et A. ERRERA (*).

I. — Les mathématiques du XIX[e] siècle se caractérisent, entre autres, par une tendance toujours plus exigeante vers la rigueur. Tout le monde sait que dans le domaine de l'Analyse, elle s'est traduite par un effort pour « arithmétiser » cette discipline. Après Gauss et Cauchy, c'est sans doute Weierstrass, Dedekind et Cantor qui ont le plus puissamment travaillé dans ce sens. Mais celui qui jusqu'à l'extrême personnifie cette réforme, c'est Louis Kronecker, non seulement à cause de ses contributions propres, mais surtout de sa claire conception de l'œuvre à réaliser, de sa ferveur étrange et de l'intransigeance passionnée qu'il mit à la poursuivre. Il avait vraiment une religion de l'arithmétique, témoin la formule bien connue : « le bon Dieu a fait les nombres entiers; tout le reste est œuvre humaine (**) ».

Pour traduire cette doctrine en un langage moins mystique, elle revient à exiger que tout concept nouveau introduit dans l'analyse soit définissable en fonction des nombres naturels. Une conséquence immédiate de cette vue, c'est que toute démonstration d'existence d'un être mathématique quelconque doit consister à le construire à partir des nombres entiers : affirmer une existence, c'est la construire arithmétiquement.

II. — Nombreux sont, parmi les successeurs de Kronecker, ceux qui ont souscrit à cette exigence. MM. Borel, Enriques,

(*) Présenté par M. Th. De Donder.

(**) *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.* (VORTRAG AUF DER BERLINER NATURF. VERS., 1886.)

Lebesgue, Weyl, pour ne citer que ceux-là, semblent estimer ce critérium indispensable. C'est dans les rangs de ces mathématiciens, dits « empiristes », que la théorie des ensembles de Cantor-Zermelo a trouvé ses critiques les plus sévères et ses adversaires les plus irréductibles.

Mais nul d'entre eux ne sembla soupçonner que sous ces vues, que l'on croirait spécifiquement mathématiques, un problème philosophique était caché. Problème grave et redoutable, obligeant, par un détour imprévu, les empiristes à remanier les fondements mêmes de la logique qu'ils avaient cru jusque-là partager avec le commun des mortels.

C'est à M. Brouwer que revient l'honneur d'avoir vu, avec une rare profondeur, les conséquences philosophiques implicitement contenues dans l'attitude des « arithmétisants » extrêmes. C'est lui qui nous force à opter aujourd'hui entre Kronecker et Aristote.

Pour atteindre à la rigueur mathématique parfaite, il faut, d'après lui, abandonner un des trois principes fondamentaux de la logique classique : *le principe du tiers exclu*. Il faut cesser d'admettre que de deux propositions contradictoires, l'une est nécessairement vraie. Ou encore, en d'autres termes, nous devons renoncer à cette habitude très ancienne de croire qu'une proposition quelconque est nécessairement vraie ou fausse.

Avant d'examiner les conséquences de cette exigence nouvelle, qu'on nous permette d'indiquer brièvement un des aspects de l'incompatibilité du principe du tiers exclu avec l'attitude empiriste.

Cette dernière n'admet, nous l'avons vu, d'autre démonstration d'existence que la construction à partir des nombres entiers. Or le principe du tiers exclu est la source d'une démonstration d'existence non constructive.

Supposons qu'il y ait des a et considérons les deux propositions : *aucun a n'est b* et *il y a un a qui est b*. Elles constituent un couple de contradictoires, et la vérité de l'une entraîne nécessairement la fausseté de l'autre.

Maintenant supposons que nous puissions établir qu'*aucun a n'est b* est ou bien contradictoire en soi, ou bien contradictoire avec un théorème déjà établi. En vertu du principe du tiers exclu, de deux contradictoires, l'une doit être vraie. Nous devrons donc affirmer *il y a un a qui est b;* et ceci est une proposition d'existence, prouvée sans construction d'aucune espèce.

Donc, ou bien il faut admettre que l'exigence de Kronecker, pour féconde qu'elle soit au point de vue pratique, n'a pas de valeur théorique absolue, et qu'il y a d'autres types de démonstration d'existence que la construction des empiristes; ou bien il faut se ranger résolument dans leur camp, mais alors rejeter comme suspect l'antique principe qu'une proposition est nécessairement vraie ou fausse.

III. — Cet abandon est d'ailleurs moins choquant qu'il ne paraît à première vue. Et nous le sentirons si nous écoutons M. Brouwer nous définir la vérité et la fausseté.

Examinons une proposition universelle absolument quelconque : *tous les a sont b*. Pour prouver sa vérité, nous avons à notre disposition plusieurs types de démonstration abstraite, dont le plus rigoureux consistera à partir de la définition des *a*, et à faire voir qu'elle implique la présence du caractère *b*. Pour prouver sa fausseté, il faut que nous montrions un *a* qui n'est pas *b*, et pour cela (nous sommes dans la thèse empiriste) il faut que nous le construisions.

Or il se peut que cette démonstration de la proposition affirmative ne puisse être faite et, d'autre part, que tous les efforts de construction d'un *a* non-*b* soient restés vains. Ces deux hypothèses peuvent fort bien s'admettre simultanément. Alors, que devient la proposition? Elle n'est ni vraie ni fausse au sens que M. Brouwer a donné à ces termes. Elle n'est ni vraie ni fausse : elle est donc *tierce*

IV. — Mais que signifie exactement ce mot ? La pensée de M. Brouwer, comme toutes les pensées très neuves, a dû se créer un langage : elle est donc difficile. On nous pardonnera d'essayer de l'interpréter.

Affirmer qu'une proposition est tierce pourrait simplement vouloir dire qu'elle est incertaine. Le tiers serait l'indémontré, par opposition au démontré vrai ou au démontré faux. Rien ne s'opposerait à ce qu'une proposition, tierce aujourd'hui, devînt vraie ou fausse demain.

Si c'était vraiment là le sens du mot tiers, la réforme de M. Brouwer se réduirait à peu de chose. Nous savions depuis longtemps qu'une proposition incertaine ne pouvait être ni affirmée vraie, ni affirmée fausse. Mais nous avions l'habitude d'ajouter qu'assurément elle était l'un des deux. Si toute proposition devait devenir vraie ou fausse dans un avenir quelque éloigné qu'il fût, n'aurions-nous pas le droit d'affirmer le principe du tiers exclu ? Dès maintenant, nous saurions que l'incertain se résoudrait un jour en vrai ou faux.

La position de M. Brouwer ne prend une signification que si elle affirme que, devant les progrès de notre savoir, il restera un résidu irréductible de propositions qui jamais ne seront vraies et jamais ne seront fausses. C'est seulement dans ce cas que le principe du tiers exclu est réellement rejeté.

Mais alors, remarquons qu'il y a un état tiers des propositions, comme il y a la vérité et l'erreur. Le tiers n'est plus uniquement un état subjectif d'ignorance : il est un fait logique objectif.

V. — Nous ne ferons pas à M. Brouwer la mauvaise querelle à quoi cependant sa position d'empiriste l'expose : lui demander de nous montrer, de nous construire une proposition tierce. Ne serait-ce point là cependant, en vertu de ses principes sur la démonstration d'existence, la seule manière valable de prouver la réalité de ce nouvel être logique ?

M. Brouwer a d'ailleurs senti lui-même cette exigence et il a donné quelques exemples qui ne nous paraissent point concluants. Mais nous ne les discuterons pas, car M. Wavre, qui accepte la théorie nouvelle, reconnaît qu'ils ne font qu'établir *l'éventualité* d'une proposition tierce : une possibilité et non une existence.

L'objection que nous faisons à M. Brouwer est d'une autre nature : elle veut établir qu'il est impossible de raisonner en admettant un tiers, sans tomber aussitôt dans une contradiction que nous allons tâcher de mettre en lumière.

Pour la clarté de l'exposé, nous ferons usage, et d'ailleurs avec la plus grande discrétion, de quelques notations abréviatives, empruntées au grand traité de MM. Russell et Whitehead (*), qui fait autorité en la matière.

VI. Postulats requis. — M. Brouwer, pour raisonner, s'il rejette une loi logique, en conserve pourtant d'autres. Il a formulé certains principes et M. Wavre, dans un remarquable travail *Sur la Logique de M. Brouwer*, en a donné un exposé systématique et d'une clarté magistrale.

Nous représentons par $p, q, r, \ldots$, les propositions dont nous parlons. Le symbole p représente l'énonciation *p est vraie*. Le symbole $\sim p$ (non-p, c'est-à-dire la *négation* de p) représente l'énonciation *p est fausse*. Le symbole p' représente l'énonciation *p n'est ni vraie ni fausse*, ou, par abréviation, *p est tierce*.

1. Le rejet du principe du tiers exclu force M. Brouwer à abandonner l'équivalence exacte d'une proposition p et de sa double négation $\sim(\sim p)$. Car, si la fausseté de la fausseté de la proposition p équivalait à la vérité de p, il n'y aurait plus place entre p et $\sim p$ pour l'état tiers qu'il postule.

Mais il garde une moitié du principe de double négation, à

(*) Le lecteur trouvera à la fin de ce travail des indications bibliographiques.

savoir que *la vérité d'une proposition implique la fausseté de sa fausseté*. En langage symbolique (*) :

$$p \supset \sim(\sim p).$$

2. M. Brouwer admet, comme la logique classique, le principe de transposition, à savoir que *si une proposition en implique une autre, la fausseté de la conséquence implique la fausseté de la prémisse* (**) :

$$p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p.$$

3. Comme la logique classique, M. Brouwer admet le principe du syllogisme : *si une proposition en implique une autre et cette autre une troisième, la première implique la troisième :*

$$q \supset r : \supset : p \supset q . \supset . p \supset r.$$

4. En plus, nous introduisons deux notions auxiliaires, dont M. Brouwer ne s'est jamais occupé, mais que tous ou presque tous les raisonnements postulent : d'une part, le *produit logique* ou affirmation simultanée, et, d'autre part, la *somme logique* ou alternative. Ces notions peuvent être définies avec une précision qui exclut toute ambiguïté.

Deux ou plusieurs propositions forment un produit logique, quand elles sont toutes vraies. Le produit logique des propositions p, q se symbolisera comme le produit algébrique par $p . q$ ou simplement pq, que l'on peut lire *p et q*.

Deux ou plusieurs propositions forment une somme logique, quand l'une d'entre elles au moins est vraie. La somme logique des propositions p, q se symbolisera par $p \vee q$, que l'on peut lire *p ou q*. Remarquons que cette relation n'exige pas que les propositions s'excluent.

(*) On sait que la notation $p \supset q$ se lit : *p implique q*, *p entraîne q*, ou encore *si p est vraie, alors q est vraie.*

(**) Dans les formules, on remplace les parenthèses par des points dont le nombre marque l'importance relative des signes encadrés.

Que ces deux notions soient indispensables dans la presque totalité des démonstrations, cela apparaît immédiatement, si l'on réfléchit que toute proposition qui dépend de conditions multiples suppose le produit logique de ces conditions ; et, d'autre part, que tout raisonnement comportant l'énumération de plusieurs cas suppose la somme logique de ces cas.

Il est évident que la somme et le produit logiques, tels que nous venons de les définir, sont des propositions ; car ils sont susceptibles d'être vrais ou faux, ou encore, dans l'hypothèse de M. Brouwer, tiers. Par conséquent, de même que le symbole p exprime indifféremment la proposition p et la proposition *p est vraie*, de même les symboles pq et $p \vee q$, expriment indifféremment les produit et somme logiques et l'énonciation de leur vérité.

Les définitions ci-dessus impliquent de toute évidence les deux postulats suivants :

4,11. *Quand le produit logique est vrai, chacun de ses termes est vrai :*

$$pq \supset p \qquad \text{et} \qquad pq \supset q.$$

4,12. *Quand un terme d'une somme logique est vrai, la somme logique est vraie :*

$$p . \supset . p \vee q \qquad \text{et} \qquad q . \supset . p \vee q.$$

Nous postulons ensuite les trois règles suivantes, qui permettent de combiner nos deux notions auxiliaires avec l'implication :

4,21. *Quand une proposition implique le produit logique de deux autres, elle les implique séparément, et réciproquement :*

$$p \supset q . p \supset r : \equiv : p \supset qr.$$

N. B. Le signe $\equiv$ exprime que les deux membres sont simplement des manières différentes de traduire la même réalité et peuvent, par conséquent, en toutes circonstances, être substitués l'un à l'autre.

4,22. *Quand une proposition implique la somme logique de deux autres, ou bien elle implique l'une ou bien elle implique l'autre, et réciproquement :*

$$p \supset q . \vee . p \supset r : \equiv : p . \supset . q \vee r.$$

4,23. *Quand deux propositions impliquent séparément une même proposition, leur somme logique implique cette proposition, et réciproquement :*

$$p \supset r . q \supset r : \equiv : p \vee q . \supset . r.$$

Que ces trois règles soient indispensables à tout raisonnement, cela apparaîtra clairement, si l'on se rappelle que : 1° très souvent nous n'utilisons pas la conclusion tout entière d'un raisonnement, mais seulement une de ses parties; 2° d'autre part, on a constamment à discuter séparément chaque cas d'une alternative à quoi le raisonnement nous a conduits; 3° et enfin, nombreux sont les raisonnements qui s'appuient sur une énumération exhaustive de plusieurs cas, et sur la vérification dans chaque cas de la proposition à démontrer.

5. Constatons maintenant que les trois affirmations possibles concernant la proposition p, à savoir *p est vraie, p est fausse* et *p est tierce*, constituent une somme logique. Cela revient à dire que, *quelle que soit la proposition p, une au moins de ces affirmations sera vraie.* Ce principe mérite d'être appelé *principe du quart exclu* et il remplace, dans la logique brouwerienne, le principe du tiers exclu de la logique classique.

M. Brouwer, naturellement, ne l'a jamais énoncé, mais il semble impossible qu'on le refuse : car la seule définition possible de l'état tiers des propositions, c'est d'être un état où elles ne sont ni vraies ni fausses. Cette définition est purement négative : si une proposition n'est pas vraie et si elle n'est pas fausse, elle est par le fait même à ranger parmi les propositions tierces. En ajoutant ce dernier cas aux deux premiers, nous aurons énuméré la totalité des hypothèses.

Nous formulons donc ainsi le postulat du quart exclu :

$$p \vee \sim p \vee p'.$$

6. Ajoutons enfin aux postulats précédents le principe de contradiction. M. Brouwer le conserve explicitement. Mais il faut évidemment le généraliser et tenir compte de l'état tiers. On dira donc qu'*il est impossible qu'une proposition soit à la fois vraie et fausse, fausse et tierce, tierce et vraie.*

VII. La contradiction. — Nous sommes maintenant en mesure de procéder à la démonstration annoncée. Nous établirons d'abord deux lemmes préliminaires :

Lemme 1. *La condition nécessaire de la fausseté d'une somme logique est la fausseté de chacun de ses termes :*

$$\sim(p \vee q) : \supset : \sim p \,.\, \sim q.$$

La question n'est pas oiseuse; car si l'on introduit l'état tiers des propositions, la condition de la fausseté d'une somme logique ne résulte pas immédiatement de sa définition.

Ce qu'on peut tirer, en effet, de cette dernière, c'est que pour qu'une somme logique soit fausse, aucun de ses termes ne peut être vrai (autrement elle serait vraie). Mais cette condition nécessaire est aussi bien la condition nécessaire pour qu'une somme logique soit tierce. Il faut donc une condition plus précise pour qu'elle soit fausse.

En vertu du postulat (4,12) nous avons

$$p \,.\supset.\, p \vee q \quad \text{et} \quad q \,.\supset.\, p \vee q.$$

Appliquons à chacune de ces formules le principe de transposition (2); il vient

$$\sim(p \vee q) \,.\supset.\, \sim p \quad \text{et} \quad \sim(p \vee q) \,.\supset.\, \sim q.$$

En vertu du postulat (4,21), il vient

$$\sim(p \vee q) : \supset : \sim p \,.\, \sim q.$$

La fausseté d'une somme logique implique donc la fausseté simultanée de ses termes. C. Q. F. D.

LEMME 2, *Première partie. Quand un terme d'un produit logique est faux, le produit logique est faux :*

$$\sim p \vee \sim q . \supset . \sim (pq).$$

Remarquons ici encore que la question ne résulte pas immédiatement de la définition du produit logique et que la fausseté d'un de ses termes pourrait entraîner aussi bien l'état tiers du produit logique.

En vertu du postulat (4,11) on a

$$pq \supset p \quad \text{et} \quad pq \supset q.$$

Appliquons le principe de transposition (2) à ces deux formules; il vient

$$\sim p . \supset . \sim (pq) \quad \text{et} \quad \sim q . \supset . \sim (pq).$$

D'où, en vertu du postulat (4,23),

$$\sim p \vee \sim q . \supset . \sim (pq). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Seconde partie. Démontrons maintenant la réciproque de ce théorème, que nous formulerons ainsi : *La condition nécessaire de la fausseté d'un produit logique est la fausseté d'un au moins de ses termes :*

$$\sim (pq) . \supset . \sim p \vee \sim q.$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Reconnaissons, cependant, que le produit logique n'étant que l'affirmation simultanée de deux propositions, sa vérité, sa fausseté ou son état tiers ne peut dépendre que de l'état de ses termes. Comme notre supposition exclut le cas où la fausseté d'un des termes déterminerait la fausseté du produit logique, il reste qu'il faut en chercher la condition, soit dans la vérité, soit dans l'état tiers de l'une des propositions constituantes. La condition cherchée est certainement contenue dans la formule suivante :

$$\sim (pq) : \supset : p \vee p' . q \vee q'.$$

Or, nous savons qu'en vertu du postulat (4,11)

$$p \vee p' . q \vee q' : \supset : p \vee p'$$

et qu'en vertu de la démonstration de la première partie du lemme 2

$$\sim p . \supset . \sim (pq).$$

Combinons ces trois formules au moyen du principe du syllogisme (3) et il résulte

$$\sim p . \supset . p \vee p'$$

conséquence évidemment absurde, puisqu'elle viole le principe de contradiction (6).

Cette absurdité entraîne celle de notre supposition. Le produit logique ne peut donc être rendu faux par aucune autre condition que la fausseté d'un de ces termes. Ici, en effet, puisque nous avons construit et énuméré toutes les conditions possibles et qu'elles sont en nombre fini, M. Brouwer doit nous reconnaître le droit de conclure. Et nous pouvons affirmer que

$$\sim (pq) . \supset . \sim p \vee \sim q. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

THÉORÈME. *La notion d'état tiers (p') d'une proposition p implique contradiction.*

En vertu du principe du quart exclu, une proposition qui n'est ni vraie ni tierce est nécessairement fausse. Traduisons ceci en formule : il le faut faire avec soin, car l'intervention du tiers complique un peu les choses. Dire qu'une proposition n'est pas vraie, c'est affirmer qu'elle est ou bien fausse ($\sim p$) ou bien tierce (p'). Dire qu'une proposition n'est pas tierce, c'est dire que l'affirmation qu'elle est tierce est ou bien fausse — c'est-à-dire $\sim (p')$ que nous écrirons $\sim p'$ — ou bien tierce — c'est-à-dire $(p')'$ que nous écrirons p''. — Donc nous avons toujours

$$\sim p \vee p' . \sim p' \vee p'' : \supset : \sim p.$$

Appliquons à cette formule le principe de transposition (2). Il vient

$$\sim (\sim p) \supset \sim (\sim p \vee p' . \sim p' \vee p'').$$

Le second membre de cette formule est la négation d'un produit logique. Nous savons, par la seconde partie du lemme **2**, qu'une négation de produit logique implique la somme logique des négations de ses constituants, c'est-à-dire, en appliquant le principe du syllogisme (**3**),

$$\sim(\sim p) \,.\, \supset \,.\, \sim(\sim p \vee p') \vee \sim(\sim p' \vee p'')$$

ou, en vertu du postulat (**4**,**22**),

$$\sim(\sim p) \supset \sim(\sim p \vee p') \,.\, \vee \,.\, \sim(\sim p) \supset \sim(\sim p' \vee p'').$$

L'une au moins des deux parties de la formule doit être vraie. Examinons-les tour à tour, en nous souvenant du postulat (**1**) et du principe du syllogisme (**3**), qui nous permettent de les remplacer par $p \supset \sim (\sim p \vee p')$ et par $p \supset \sim (\sim p' \vee p'')$ respectivement.

Le second membre de la première, en vertu du lemme **1**, implique le produit logique des négations de ses constituants, soit

$$p : \supset : \sim(\sim p) \,.\, \sim p'$$

d'où nous ne garderons, en vertu du postulat (**4**,**11**), que

$$p \supset \sim p'.$$

En transposant (**2**),

$$\sim(\sim p') \supset \sim p.$$

Comme, en vertu de (**1**), $p' \supset \sim (\sim p')$, nous pouvons appliquer le principe du syllogisme (**3**) et il vient

$$p' \supset \sim p.$$

Ou, autrement dit, *quand une proposition est tierce, elle est fausse*, conclusion évidemment absurde qui nous force à nous retourner vers l'autre branche de la somme logique.

Celle-ci affirmait que

$$p \supset \sim(\sim p' \vee p'').$$

Appliquons de même le lemme (**1**), et il vient

$$p : \supset : \sim(\sim p') \,.\, \sim(p'').$$

Arrêtons-nous sur la signification du second membre. C'est un produit logique. Le premier de ses termes nous affirme qu'il est faux que p' soit faux. Le second nous affirme qu'il est faux que p' soit tiers. Une proposition qui n'est ni fausse ni tierce devant être vraie, il s'ensuit qu'on peut écrire

$$\sim(\sim p') . \sim(p'') : \supset : p'$$

et, par syllogisme (3),

$$p \supset p'.$$

Ou, en d'autres termes, *quand une proposition est vraie, elle est tierce.*

Les principes mêmes de M. Brouwer nous conduisent donc à cette alternative de contradictions flagrantes : ou bien nous devons réduire le tiers au faux, ou c'est le vrai que nous devons réduire au tiers. Mais jamais ne subsiste la possibilité de la logique tripartite qu'il voulait instaurer.

VIII. Conclusions. — Quelle est l'origine de cette contradiction? L'attribuerait-on aux postulats que nous avons ajoutés à ceux de M. Brouwer, évidemment insuffisants à eux seuls pour fonder le raisonnement? Nous ne croyons pas que ce soit possible. Car ces postulats ne sont que des parties de la définition de l'affirmation simultanée et de l'alternative prises dans le sens très large que nous avons explicité plus haut et dont nous ne sommes sortis à aucun moment de nos démonstrations. Et rejeter l'un quelconque de ces postulats revient à nous interdire soit d'affirmer simultanément plusieurs propositions, soit d'en considérer un groupe dont l'une au moins est vraie.

Or, nous refuser l'affirmation simultanée, c'est nous refuser le droit de considérer même deux propositions, c'est nous refuser le droit au raisonnement mathématique et au raisonnement en général. Nous refuser l'alternative, c'est nous empêcher d'énoncer des phrases comme : « un nombre entier est pair ou impair »; « l'un de ces objets »; « considérons l'un des n premiers nombres »; « soit un nombre entier n », etc., etc.

Non, le germe de la contradiction que nous avons mise au jour n'est pas dans ces opérations indispensables que toute pensée suppose : il est déjà dans les postulats de M. Brouwer. Il est situé dans l'admission simultanée du tiers et des deux postulats (1) et (2) : principe de double négation et principe de transposition, qui sont d'ailleurs solidaires.

Que l'on y réfléchisse un instant, en effet. S'il est logique d'admettre un état tiers de la proposition p, pourquoi la vérité de p entraînerait-elle la fausseté de sa négation? La négation d'une proposition est une affirmation au même titre qu'une autre. Et l'affirmation de p ne peut avoir pour $\sim p$ qu'une conséquence, c'est que $\sim p$ n'est pas vraie; mais n'être pas vraie veut dire être fausse ou être tierce. Et en bonne logique brouwerienne, le postulat (1) devrait être remplacé par

$$p \,.\supset.\, \sim(\sim p) \vee (\sim p)'.$$

De même pour le principe de transposition : si p implique q, M. Brouwer admet que la fausseté de q entraîne celle de p. Mais qui ne sent ici l'arbitraire, si le tiers existe? La fausseté de q entraîne la non-vérité de p, cela va de soi; mais la non-vérité de p, c'est aussi bien son état tiers que sa fausseté. Et le principe de transposition deviendrait

$$p \supset q :\supset: \sim q \,.\supset.\, \sim p \vee p'.$$

Mais que l'on y fasse attention. En poussant ainsi les idées de M. Brouwer jusqu'à leurs ultimes conséquences, nous arriverions sans doute à la cohérence, mais à la cohérence d'un mirage évanouissant. Car, avec les postulats modifiés, il n'y a plus aucun rapport entre le vrai et le faux. Ces modifications nécessaires aux deux derniers liens que M. Brouwer avait maintenus entre le vrai et le faux rompent toutes les amarres, et le faux s'en va à la dérive.

Ainsi transformés, les principes logiques ne permettent plus d'établir de rapports qu'entre deux groupes de propositions, les vraies et les non-vraies, ces dernières comprenant les fausses et les tierces. Et il se fait qu'en essayant de fixer ces rapports, on retrouvera la théorie bipartite de la logique traditionnelle : la logique du vrai et du non-vrai se développerait dans les moules que la logique classique a peu à peu constitués.

Seulement, au sein du non-vrai, il y aurait un îlot privilégié, qui serait peuplé de propositions fausses. Mais comme de la fausseté de ces propositions il n'y aurait jamais moyen de passer à la vérité de leur contradictoire, et que jamais non plus aucune vérité ne nous permettrait de conclure à la fausseté d'une proposition, cette fausseté n'aurait plus aucun intérêt pratique. Ce qui nous importe, en effet, c'est la possibilité d'inférer; et le système de rapports qui nous le permet est noué entre le vrai et le non-vrai. Savoir qu'une proposition est non-vraie nous intéresse au premier chef; mais savoir qu'une proposition non-vraie est fausse n'aurait pas plus d'intérêt pour nous que de savoir qu'elle a dix-sept syllabes.

La tentative de M. Brouwer semble donc avoir échoué. Ou bien sa définition de la fausseté l'engage dans une contradiction. Ou bien elle perd toute valeur.

Or rappelons-nous que cette théorie découlait logiquement de l'adhésion sans réserve à l'attitude empiriste en mathématiques. Que celle-ci à son tour est tout entière concentrée autour de ses exigences sur les démonstrations d'existence et sur la construction des êtres mathématiques à partir des nombres entiers. Tout cela apparaît maintenant comme un faisceau bien lié, mais qui nous entraîne aux erreurs que le très grand mérite de M. Brouwer aura été d'expliciter.

En vérité, on peut conclure que l'arithmétisation à outrance, bien qu'elle ait de nombreux titres pratiques à notre reconnaissance, vient de nous montrer qu'elle n'a pas de droits à être la méthode universelle de démonstration ni l'universel critérium de validité. Nous avions failli l'oublier, et cet instrument de rigueur aurait pu devenir une gangue, paralysant les progrès de la science qu'elle a un moment stimulés.

M. Brouwer nous a fourni l'occasion de constater que si l'arithmétisation est une méthode technique extrêmement féconde, elle reste d'application partielle, comme toutes les méthodes techniques. Tandis que le critérium universel de rigueur, ce sont les lois immuables de la logique.

BIBLIOGRAPHIE.

M. Brouwer énonce explicitement les postulats 1, 2 et 3 (double négation, transposition et syllogisme) dans :

Intuitionistische splitsing van mathematische grondbegrippen. (K. Ak. van Wet. Amsterdam, deel XXXII, N° 9, pp. 877-879.)

M. Wavre énonce explicitement ces mêmes postulats dans :

Logique formelle et Logique empiriste. (Revue de Métaphysique et de Morale, 1926, t. XXXIII, n° 1, pp. 69-73.)

Voici une liste d'ouvrages qui traitent de cette question :

L.-E.-J. Brouwer, *Over de Grondslagen der Wiskunde.* (Amsterdam, Maas en van Suchtelen, 1907.)

— *Addenda en corrigenda over de Grondslagen der Wiskunde.* (K. Ak. van Wet. Amsterdam, 27 April 1917, deel XXV.)

— *Intuitionistischer Beweis des Jordanschen Kurvensatzes.* (K. Ak. van Wet. Amsterdam, Proceedings, vol. XXVIII, n° 5.)

— *Intuitionistische verzamelingsleer.* (K. Ak. van Wet. Amsterdam, 18 December 1920, deel XXIX.)

— *Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwickelung?* (K. Ak. van Wet. Amsterdam, 18 December 1920, deel XXIX.)

— *Intuitionistisch bewijs van de hoofdstelling der algebra.* (K. Ak. van Wet. Amsterdam, deel XXXIII, n° 2.)

— *Intuitionistische aanvulling van de hoofdstelling der algebra.* (K. Ak. van Wet. Amsterdam, deel XXXIII, n° 5.)

— *Bewijs van de onafhankelijkheid der onttrekkingsrelatie van de versmeltingsrelaties.* (K. Ak. van Wet. Amsterdam, deel XXXIII, n° 6.)

— *Intuitionistische invoering van het dimensiebegrip.* (K. Ak. van Wet. Amsterdam, deel XXXV, n° 5.)

— *De intuitionistische vorm van het theorema van Heine-Borel.* (K. Ak. van Wet. Amsterdam, deel XXXV, n° 6.)

— *Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik*, I. (Mathematische Annalen. Berlin, 1925, Band XCIII, Heft 3/4.)

— *Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik*, II. (Mathematische Annalen. Berlin, 1925, Band XCV, Heft 3.)

— *Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik*, III. (Mathematische Annalen. Berlin, 1926, Band XCVI, Heft 3/4.)

— *Over de Rol van het Principium Tertii Exclusi in de Wiskunde, in het bijzonder in de Functietheorie.* (Wis- en Natuurkundig Tijdschrift. Gent, 1923, deel II, Aflev. 1-2.)

R. Wavre, *Revue de Métaphysique et de Morale,* juillet-septembre 1924.

— *Sur le principe du tiers exclu.* (Revue de Métaphysique et de Morale, 1926.)

P. Lévy, *Revue de Métaphysique et de Morale,* 1926.

B. Russell et A. N. Witehead, *Principia Mathematica.* Cambridge, 1911-1913, 3 volumes.

Marcel HAYEZ, imprimeur, rue de Louvain, 112, Bruxelles.

PUBLICATIONS ACADÉMIQUES DEPUIS LA RÉORGANISATION, EN 1816

Mémoires, t. I-LIV (1820-1904); in-4°.
Mémoires couronnés et Mém. des savants étrangers, t. I-LXII (1817-1904); in-4°.
Mémoires couronnés, t. I-LXVI (1840-1904); in-8°.
Tables des Mémoires, nouvelle édition, 1772-1897; in-8°. — **Supplément**, 1898-1914.
Mémoires (**n. sér.**) **in-4°** de la Classe des sciences, t. I à VIII (4e fasc.).
Mémoires (**n. sér.**) **in-8°** de la Classe des sciences, t. I à VIII.
Mémoires (**n. sér.**) **in-4°** de la Classe des lettres, t. I à IX.
Mémoires (**n. sér.**) **in-8°** de la Classe des lettres, t. I à XX (2e fasc.), t. XXII (1re partie), t. XXIII (1er fasc.).
Mémoires in-4° de la Classe des beaux-arts, t. I.
Mémoires in-8° de la Classe des beaux-arts, t. II.
Tables de Logarithmes, par A. Namur et P. Mansion; in-8°.
Annuaire, 1re à 92e année, 1835-1926; in-18. — **Table des Notices biographiques**, 1919.
Règlements et Documents concernant les trois Classes (éd. de 1896 et de 1903); in-18.
Statuts et Règlements, in-18, 1921.
Fondations académiques, 1914, gr. in-8°.
Bulletins, 1re sér., t. I-XXIII, avec **annexes** — 2e sér., t. I-L; — 3e sér., t. I-XXXVI, in-8°. — Classe des sciences, 4e sér., 1899-1910; 5e sér., gr. in-8°, 1911-1926, t. I-XII, avec **annexes**. — Classe des lettres et des sciences morales et politiques et des beaux-arts, 4e sér., 1899-1910; 5e sér., gr. in-8° 1911-1926, t I-XII, avec **annexes**. — Classe des beaux-arts, t. I-VIII, 1919-1926 — **Tables générales**, 1832-1914, 9 vol. in-8°.
Bibliographie académique, 1re édit. (1854); — 2e édit. (1874); — 3e édit. (1886) — 4e édit (1896); — 5e édit. (1907-1909); in-18.
Catalogue de la Bibliothèque de l'Académie, 1re partie : Sociétés savantes et périodiques; 2e partie : sciences, lettres, arts (1881-1890); 4 vol. in-8°.
Catalogues onomastiques des accroissements, 1883-1914, 3 vol. gr. in-8°.
Catalogue de la bibliothèque du baron de Stassart (1863); in-8°.
Centième anniversaire de fondation (1772-1872), 1872; 2 vol. gr. in-8°.
L'Académie royale de Belgique depuis sa fondation (1772-1922); 1 vol. in-8°

Monuments de la littérature flamande (in-8°).

Œuvres de Van Maerlant : DER NATUREN BLOEME, t. Ier, publié par J. Bormans, 1857, 1 vol. RYMBYBEL, avec Glossaire, publié par J. David, 1858-1860; 3 vol. — ALEXANDERS GEESTEN, publié par Snellaert, 1860-1862; 2 vol. — **Nederlandsche gedichten**, etc., publiées par Snellaert, 1869; 1 vol. — **Parthonopeus van Bloys**, publié par J. Bormans, 1871; 1 vol. — **Speghel der Wysheit**, van Jan Praet, publié par J. Bormans, 1872; 1 vol

Œuvres des grands écrivains du pays (in-8°).

Œuvres de Chastelain, publiées par le baron Kervyn de Lettenhove, 1863-1865, 8 vol in-8°. — **Le premier livre des Chroniques de Froissart**, par le même. 1863. 2 vol. — **Chroniques de Jehan le Bel**, par L. Polain. 1863, 2 vol. — **Li Roumans de Cléomadès**, par André Van Hasselt. 1866, 2 vol. — **Dits et Contes de Jean et Baudouin de Condé**, par Auguste Scheler 1866, 3 vol. — **Li ars d'amour**, etc., par J Petit. 1866-1872, 2 vol. — **Œuvres de Froissart** : *Chroniques*, par le baron Kervyn de Lettenhove. 1867-1877, 26 vol. — *Poésies*, par Aug Scheler. 1870 1872, 3 vol. — *Glossaire*, par le même. 1874, 1 vol. — **Lettres de Commines**, par Kervyn de Lettenhove. 1867, 3 vol — **Dits de Watriquet de Couvin**, par A. Scheler. 1868, 1 vol. — **Les Enfances Ogier**, par le même 1874. 1 vol. — **Bueves de Commarchis**, par Adenès li Rois, par le même 1874, 1 vol. — **Li Roumans de Bertes aux grans piés**, par le même. 1874, 1 vol. — **Trouvères belges du XIIe au XIVe siècle**, par le même. 1876, 1 vol. — Nouvelle série, 1879, 1 vol. — **Li Bastars de Bullion**, par le même. 1877, 1 vol. — **Récits d'un Bourgeois de Valenciennes (XIVe siècle)**, par le baron Kervyn de Lettenhove. 1877, 1 vol. — **Œuvres de Ghillebert de Lannoy**, par Ch. Potvin. 1878, 1 vol. — **Poésies de Gilles li Muisis**, par Kervyn de Lettenhove 1882, 2 vol. — **Œuvres de Jean Lemaire de Belges**, par J. Stecher. 1882-1891 4 vol avec notice. — **Li Regret Guillaume**, par A. Scheler. 1882, 1 volume.

Biographie nationale.

Biographie nationale, t. I à XXII; XXIII, fasc. 1. Bruxelles, 1866-1922.

Commission royale d'histoire.

Collection de Chroniques belges inédites, publiées par ordre du Gouvernement, 130 vol. in-4°. (Voir la liste sur la couverture des Chroniques.)
Bulletins, 1re sér., avec table (1837 1849), 17 vol. in-8°; — 2me sér. avec table (1850-1859), 13 vol. in-8°; — 3me sér., avec table (1860-1872), 15 vol. in-8° — 4me sér., avec table (1873-1891), 18 vol. in-8°; — 5me sér., t. I-XI; à partir de 1902, t. LXXI-LXXXIX;
Annexes aux *Bulletins*. Voir la liste sur la couverture des Chroniques et des Bulletins.